ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

АЛГЕБРА

ГЛАВА X

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Перевод с французского Е.С. ГОЛОДА

Под редакцией А.И. КОСТРИКИНА

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.14
Б91
УДК 512.66

Бурбаки Н. АЛГЕБРА. Глава X. **Гомологическая алгебра**: Пер. с фр./Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 184 с.

Содержит современное, и в то же время достаточно элементарное, детальное изложение основных разделов гомологической алгебры, находящих фундаментальные приложения как в самой алгебре, так и в других разделах математики, прежде всего, в алгебраической геометрии и топологии. Обширный дополнительный материал, содержащийся в многочисленных упражнениях, позволяет овладеть еще рядом важных разделов гомологической алгебры, которые либо не вошли в основной текст, либо в нем только кратко упомянуты. В целом книга дает почти исчерпывающее представление о многообразии идей и методов гомологической алгебры.

Для математиков различных специальностей, применяющих в своих исследованиях методы гомологической алгебры.

Б $\frac{1702030000-098}{053(02)-87}$ 9-87

© Masson, Paris, 1980

© Перевод на русский язык.
Издательство "Наука".
Главная редакция физико-
математической литературы, 1987

СПОСОБ ПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫМ ТРАКТАТОМ

Новое издание

1. В Трактате математика рассматривается с самых ее начал и с полными доказательствами. Поэтому его чтение не предполагает в принципе никаких специальных математических знаний, а требует лишь некоторого навыка к математическим рассуждениям и известной способности к абстракции. Однако Трактат рассчитан преимущественно на читателей, обладающих хорошим знанием материала по крайней мере в объеме первого или первых двух курсов университета.

2. Принятый способ изложения носит аксиоматический характер и чаще всего реализует переход от общего к частному. К тому же нужды доказательства требуют, чтобы в принципе главы следовали в строго фиксированном логическом порядке. Поэтому полезность некоторых рассмотрений будет обнаруживаться лишь при чтении последующих глав, во всяком случае, если читатель еще не обладает достаточно обширными познаниями.

3. Трактат делится на Книги, а каждая Книга – на главы. Фактически опубликованы, полностью или частично, следующие Книги:

Теория множеств	обозначаемая через	E
Алгебра	–	A
Общая топология	–	TG
Функции действительного переменного	–	FVR
Топологические векторные пространства	–	EVT
Интегрирование	–	INT
Коммутативная алгебра	–	AC
Дифференцируемые и аналитические многообразия	–	VAR
Группы и алгебры Ли	–	LIE
Спектральная теория	–	TS

В *шести первых* Книгах (относительно указанного выше порядка) каждое высказывание апеллирует лишь к определениям и результатам, изложенным ранее в текущей главе или в предшествующих главах, причем главы располагаются в следующем порядке: E; A, главы I–III; TG, главы I–III; A, главы IV и следующие; TG, главы IV и следующие; FVR; EVT; INT. Начиная с седьмой Книги, в случае необходимости, читатель найдет в начале каждой Книги или главы точное указание на используемые Книги или главы (при этом шесть первых Книг всегда будут предполагаться известными).

4. Впрочем, кое-какие фрагменты представляют собой исключение из предыдущих правил. Они выделяются двумя звездочками: *. . . * и либо представляют собой примеры, облегчающие понимание текста, но опирающиеся на факты, которые читатель, возможно, знает из других источников, либо в них помимо результатов, предполагаемых известными на протяжении всей рассматриваемой главы, используются также результаты, доказываемые в других разделах Трактата. Фрагменты второго типа будут свободно использоваться в тех частях Трактата, в которых предполагаются известными как главы, в которых эти фрагменты содержатся, так и главы, на которые они опираются. Мы надеемся, что читатель сможет убедиться в отсутствии порочного круга.

5. Некоторые Книги (как опубликованные, так и подготавливаемые к печати) снабжены *сводками результатов*. Эти сводки содержат самое существенное из определений и результатов Книги, но не включают никаких доказательств.

6. Логический остов каждой главы составляют *определения*, *аксиомы* и *теоремы* этой главы; именно этот материал особенно необходимо удерживать в памяти для дальнейшего. Результаты менее важные или те, которые легко можно восстановить на основании теорем, фигурируют под названием "предложений", "лемм", "следствий", "замечаний" и т.д.; то, что может быть опущено при первом чтении, напечатано петитом. Под названием "Схолия" дается иногда комментарий к особо важной теореме.

Во избежание скучных повторений иногда вводятся те или иные обозначения или сокращения, действительные лишь в пределах одной главы или одного параграфа (например, в главе, где все рассматриваемые кольца коммутативны, под словом "кольцо" понимается всюду "коммутативное кольцо"). Такого рода соглашения всегда явно оговариваются в начале главы или параграфа, где они применяются.

7. Некоторые места имеют своей целью предостеречь читателя от серьезной ошибки, в которую он рискует впасть; эти места отмечены на поле знаком ☡ ("опасный поворот").

8. Упражнения предназначены, с одной стороны, для того, чтобы дать возможность читателю удостовериться в правильном усвоении им текста, а с другой – чтобы познакомить его с результатами, для которых не нашлось места в тексте; наиболее трудные из них отмечены знаком ¶.

9. Терминология, принятая в этом Трактате, была предметом особого внимания. *Были приложены старания никогда не отклоняться от установившейся терминологии без весьма серьезных на то оснований.*

10. Приложены старания, не жертвуя простотой изложения, всюду пользоваться выдержанно точным языком. Насколько это возможно, *вольности речи*, без которых любой математический текст рискует стать педантичным и даже неудобочитаемым, каждый раз оговариваются.

11. Так как текст посвящен догматическому изложению теории, читатель найдет библиографические ссылки лишь в виде исключений; эти ссылки будут сосредоточены в *исторических очерках*. Библиография, которая следует за каждым из этих очерков, чаще всего содержит только книги и оригинальные статьи, сыгравшие наибольшую роль в развитии рассматриваемой теории; она никоим образом не претендует на полноту.

Что касается упражнений, не было вообще сочтено полезным указывать их происхождение, которое может быть самым различным (оригинальные научные статьи, учебные руководства, сборники задач).

12. В новом издании ссылки на теоремы, аксиомы, определения, замечания и т.п. даются, в принципе, путем указания последовательно Книги (с сокращениями из списка в п. 3), главы и страницы, где они находятся. Внутри той же самой Книги упоминание о ней опускается. Например, в Книге "Алгебра" сочетание

E, III, p. 32, cor. 3

отсылает к следствию 3, находящемуся в Книге "Теория множеств", гл. III, с. 32;

II, p. 24, prop. 17

отсылает к предложению 17 из книги "Алгебра", гл. II, с. 24.

Сводки результатов обозначаются буквой R. Например, EVT, R означает "сводка результатов из книги "Топологические векторные пространства".

Так как новые издания некоторых Книг должны выйти позднее, ссылки на них даются путем последовательного указания Книги, главы, параграфа и пункта, где находится цитируемый результат; например,

AC, III, § 4, n° 5, cor. de la prop. 6 [1])

[1]) В настоящем переводе сохранены ссылки на оригинальные выпуски нового издания Трактата, поскольку они по большей части не имеют соответствий в выпусках старого издания на русском языке; в тех случаях, когда такие соответствия имеются, параллельно даны ссылки на надлежащие места русского перевода. – *Примеч. пер.*

ГЛАВА X
ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом параграфе через A *обозначается кольцо. Если явно не оговорено противное, все рассматриваемые модули и идеалы считаются левыми.*

Все определения и результаты применимы также и к правым модулям, если их рассматривать как левые модули над противоположным кольцом.

Если M – A-*модуль и если* $a \in A$, *то через* a_M *обозначается гомотетия* $x \mapsto ax$ *на* M. *Следовательно,* $1_M = Id_M$ (*тождественное отображение множества* M); *когда это не может привести к путанице, вместо* 1_M *пишется просто* 1.

Наконец, через 0 *обозначается* A-*модуль, состоящий только из своего нейтрального элемента, выбранный раз и навсегда* (ср. II, p. 8).

1. Коммутативные диаграммы

Пусть, например, B, C, D, E, F – пять множеств, и пусть f – отображение E в F, g – отображение B в C, h – отображение D в E, u – отображение B в D и v – отображение C в E. Для простого описания ситуации такого рода часто используются диаграммы; так, рассматриваемая ситуация описывается следующей диаграммой (E, II, p. 8; Теория множеств, II, с. 91):

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ D & \xrightarrow[h]{} & E \xrightarrow[f]{} F . \end{array} \qquad (1)$$

В такой диаграмме группа знаков $E \xrightarrow{f} F$ схематически обозначает, что f есть отображение E в F. Когда ясно, о каком отображении идет речь, буква f опускается и пишется просто $E \to F$.

Когда B, C, D, E, F – группы (соответственно A-модули) и f, g, h, u, v – гомоморфизмы групп (соответственно A-модулей), для краткости говорят, что диаграмма (1) – это *диаграмма групп* (соответственно A-*модулей*).

В принципе диаграмма не является математическим объектом, а только *рисунком*, предназначенным для облегчения чтения. На практике диаграммы часто используют как *краткие обозначения*, позволяющие избежать подробного наименования рассматриваемых множеств и отображений; так, говорят: "рассмотрим диаграмму (1)" вместо того, чтобы сказать: "пусть B, C, D, E, F – пять множеств... и v – отображение C в E"; см., например, формулировку предложения 1 в п. 2.

Рассмотрим, например, следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle e}\downarrow \\ B' & \xrightarrow[f']{} & C' & \xrightarrow[g']{} & D' & \xrightarrow[h']{} & E' \end{array} \qquad (2)$$

Всякому пути, составленному из некоторого числа отрезков диаграммы, проходимому в направлении, указанном стрелками, ставится в соответствие отображение множества, изображаемого началом первого отрезка, в множество, изображаемое концом последнего отрезка, представляющее собой композицию отображений, изображаемых различными проходимыми отрезками. Принимается соглашение, что для всякой

вершины диаграммы, например, C, имеется путь, сводящийся к C, и ему ставится в соответствие тождественное отображение 1_C.

В диаграмме (2), например, имеются три пути, выходящие из B и оканчивающиеся в D′; соответствующие отображения – это $d \circ g \circ f$, $g' \circ c \circ f$ и $g' \circ f' \circ b$. Говорят, что диаграмма коммутативна, если для всякой пары путей этой диаграммы, имеющих одинаковые начало и конец, два соответствующих отображения равны; в частности, если у некоторого пути его конец совпадает с его началом, соответствующее отображение должно быть тождественным.

Для того чтобы диаграмма (2) была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$f' \circ b = c \circ f, \quad g' \circ c = d \circ g, \quad h' \circ d = e \circ h; \tag{3}$$

иначе говоря, необходимо и достаточно, чтобы три квадратных диаграммы, выделенных из диаграммы (2), были коммутативны. Действительно, из соотношений (3) вытекает, что $d \circ g \circ f = g' \circ c \circ f$, так как $d \circ g = g' \circ c$, и что $g' \circ c \circ f = g' \circ f' \circ b$, так как $c \circ f = f' \circ b$; следовательно, три пути, выходящих из B и оканчивающихся в D′, дают одно и то же отображение. Так же проверяется, что четыре пути, выходящих из B и заканчивающихся в E′ (соответственно три пути, выходящих из C и заканчивающихся в E′), дают одно и то же отображение. Соотношения (3) означают, что два пути, выходящих из B (соответственно C, D) и оканчивающихся в C′ (соответственно D′, E′) дают одно и то же отображение. Все другие пары вершин диаграммы (2) могут быть соединены самое большее одним путем, и диаграмма (2), следовательно, коммутативна.

В дальнейшем мы будем предоставлять читателю формулировку и проверку аналогичных результатов для других типов диаграмм.

2. Змеевидная диаграмма

Предложение 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму* A*-модулей*

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{v} & P \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ M' & \xrightarrow[u']{} & N' & \xrightarrow[v']{} & P' . \end{array} \tag{4}$$

Предположим, что обе строки диаграммы (4) *точные. Тогда*:

(i) *Если отображение* h *инъективно, то*

$$\operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u') = \operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u). \tag{5}$$

(ii) *Если отображение* f *сюръективно, то*

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v). \tag{6}$$

Докажем (i). Ясно, что

$$\operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u) \subset \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u').$$

Обратно, пусть $y' \in \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u')$. Имеется элемент $y \in N$, для которого $y' = g(y)$. Так как $v' \circ u' = 0$, то $0 = v'(y') = v'(g(y)) = h(v(y))$, откуда $v(y) = 0$, так как h инъективно. Так как (u, v) – точная последовательность, то имеется элемент $x \in M$, для которого $y = u(x)$, откуда $y' = g(u(x))$.

Докажем (ii). Так как $v \circ u = 0$ и $v' \circ u' = 0$, то ясно, что

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v).$$

Обратно, пусть $y \in \operatorname{Ker}(v' \circ g)$. Тогда $g(y) \in \operatorname{Ker}(v')$, и имеется элемент $x' \in M'$, для которого $u'(x') = g(y)$, так как последовательность (u', v') точная. Так как f сюръективно, то имеется элемент $x \in M$, для которого $f(x) = x'$, откуда $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$; отсюда заключаем, что $y - u(x) \in \operatorname{Ker}(g)$, чем доказательство заканчивается.

Лемма 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму* A*-модулей*:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ M' & \xrightarrow[u']{} & N' . \end{array} \tag{7}$$

Существуют и притом единственные гомоморфизмы u_1: $\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ и $u_2 = \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g)$, *для которых диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\,(f) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}\,(g) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathrm{M} & \xrightarrow[u]{} & \mathrm{N} \end{array} \tag{8}$$

и

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}' & \xrightarrow{u'} & \mathrm{N}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Coker}\,(f) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}\,(g) \end{array} \tag{9}$$

коммутативны, где i *и* j *обозначают канонические вложения,* p *и* q *– канонические сюръекции.*

Действительно, если $x \in \mathrm{Ker}(f)$, то $f(x) = 0$ и $g(u(x)) = u'(f(x)) = 0$, следовательно, $u(x) \in \mathrm{Ker}(g)$, что немедленно дает существование и единственность гомоморфизма u_1. Точно так же, имеем:

$$u'(f(\mathrm{M})) = g(u(\mathrm{M})) \subset g(\mathrm{N}),$$

следовательно, при переходе к фактормодулям u' дает гомоморфизм

$$u_2\colon \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g),$$

единственный, для которого диаграмма (9) коммутативна.

Будем теперь исходить из *коммутативной* диаграммы A-модулей (4); ввиду леммы 1 ей соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}\,(f) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}\,(g) & \xrightarrow{v_1} & \mathrm{Ker}\,(h) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \mathrm{M} & \xrightarrow{u} & \mathrm{N} & \xrightarrow{v} & \mathrm{P} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathrm{M}' & \xrightarrow[u']{} & \mathrm{N}' & \xrightarrow[v']{} & \mathrm{P}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \mathrm{Coker}\,(f) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}\,(g) & \xrightarrow[v_2]{} & \mathrm{Coker}\,(h), \end{array} \tag{10}$$

где i, j, k – канонические вложения, p, q, r – канонические сюръекции, u_1, u_2 (соответственно v_1, v_2) – гомоморфизмы, полученные из u, u' (соответственно v, v') с помощью леммы 1.

Предложение 2. *Предположим, что в коммутативной диаграмме* (4) *строки* (u, v) *и* (u', v') *точные. Тогда*:

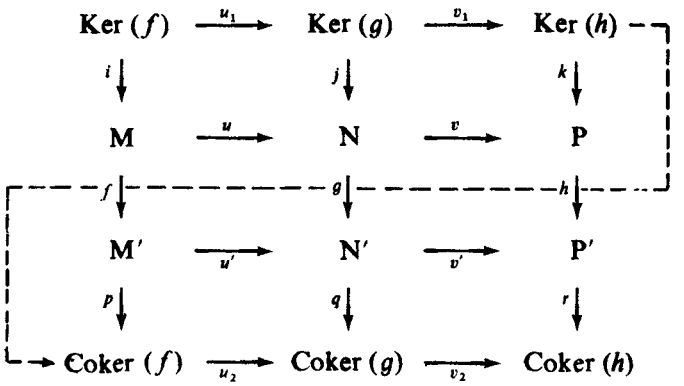
(i) $v_1 \circ u_1 = 0$; *если* u' *инъективно, то последовательность* (u_1, v_1) *точная.*

(ii) $v_2 \circ u_2 = 0$; *если* v *сюръективно, то последовательность* (u_2, v_2) *точная.*

(iii) *Предположим, что* u' *инъективно и* v *сюръективно. Тогда существует и притом единственный гомоморфизм* d: $\mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$, *обладающий следующим свойством: если элементы* $z \in \mathrm{Ker}(h)$, $y \in N$ *и* $x' \in M'$ *удовлетворяют соотношениям* $v(y) = k(z)$ *и* $u'(x') = g(y)$, *то* $d(z) = p(x')$. *Кроме того, последовательность*

$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{u_1} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{v_1} \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{u_2} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{v_2} \mathrm{Coker}(h) \tag{*}$$

точная.



Докажем (i). Так как u_1 и v_1 получены из ограничений отображений u и v на $\mathrm{Ker}(f)$ и $\mathrm{Ker}(g)$ соответственно, то $v_1 \circ u_1 = 0$. Имеем:

$$\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(j) \cap \mathrm{Im}(u).$$

Но, согласно предложению 1 (i), имеем $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Im}(j \circ u_1) = \mathrm{Im}(u_1)$, если u' инъективно.

Докажем (ii). Так как u_2 и v_2 получаются из u и v путем перехода к фактормодулям, ясно, что $v_2 \circ u_2 = 0$. Предположим, что v сюръективно; так как p и q сюръективны, то, ввиду предложения 1 (ii), имеем:

$$\mathrm{Ker}(v_2) = q(\mathrm{Ker}(v_2 \circ q)) = q(\mathrm{Ker}(v') + \mathrm{Im}(g)) =$$

$$= q(\mathrm{Ker}(v')) = q(\mathrm{Im}(u')) = \mathrm{Im}(q \circ u') = \mathrm{Im}(u_2 \circ p) = \mathrm{Im}(u_2).$$

Докажем, наконец, (iii). Если $z \in \mathrm{Ker}(h)$, то имеется элемент $y \in \mathrm{N}$, для которого $v(y) = k(z)$, поскольку v сюръективно; кроме того, $v'(g(y)) = h(k(z)) = 0$, и, следовательно, имеется *единственный* элемент $x' \in \mathrm{M}'$, для которого $u'(x') = g(y)$, поскольку u' инъективно. Покажем, что элемент $p(x') \in \mathrm{Coker}(f)$ *не зависит* от элемента $y \in \mathrm{N}$, для которого $v(y) = k(z)$. Действительно, если $y_1 \in \mathrm{N}$ – второй такой элемент, что $v(y_1) = k(z)$, то $y_1 = y + u(x)$, где $x \in \mathrm{M}$; покажем, что если $x_1' \in \mathrm{M}'$ и $u'(x_1') = g(y_1)$, то $x_1' = x' + f(x)$; действительно, $u'(x' + f(x)) = u'(x') + u'(f(x)) = g(y) + g(u(x)) = g(y + u(x)) = g(y_1)$. Наконец, отсюда заключаем, что $p(x_1') = p(x') + p(f(x)) = p(x')$. Следовательно, можно положить $d(z) = p(x')$, и этим определено отображение d: $\mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$.

Если теперь z_1, z_2 – элементы из $\mathrm{Ker}(h)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ и $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, то находим элементы y_1 и y_2 из N, для которых $v(y_1) = k(z_1)$ и $v(y_2) = k(z_2)$, и выбираем в качестве $y \in \mathrm{N}$ элемент $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда непосредственно видно, что

$$d(z) = \lambda_1 d(z_1) + \lambda_2 d(z_2),$$

следовательно, d – *гомоморфизм*.

Предположим, что $z = v_1(t)$ для некоторого $t \in \mathrm{Ker}(g)$; тогда выбираем в качестве $y \in \mathrm{N}$ элемент $j(t)$. Так как $g(j(t)) = 0$, то отсюда заключаем, что $d(z) = 0$, следовательно, $d \circ v_1 = 0$. Обратно, предположим, что $d(z) = 0$. В предыдущих обозначениях имеем, следовательно, что $x' = f(x)$, где $x \in \mathrm{M}$. В этом случае $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$, откуда $g(y - u(x)) = 0$. Элемент $y - u(x)$ имеет, следовательно, вид $j(n)$ для $n \in \mathrm{Ker}(g)$, и получаем:

$$k(z) = v(y) = v(u(x) + j(n)) = v(j(n)) = k(v_1(n));$$

так как k инъективно, то $z = v_1(n)$, и это доказывает, что последовательность (*) точная в члене $\mathrm{Ker}(h)$.

Наконец, имеем (все в тех же обозначениях):

$$u_2(d(z)) = u_2(p(x')) = q(u'(x')) = q(g(y)) = 0,$$

следовательно, $u_2 \circ d = 0$.

Обратно, предположим, что элемент $w = p(x')$ из $\mathrm{Coker}(f)$ таков, что

$$u_2(w) = u_2(p(x')) = 0 \quad (\text{где } x' \in \mathrm{M}').$$

Таким образом, $q(u'(x')) = 0$ и, следовательно, $u'(x') = g(y)$ для некоторого $y \in N$; так как $v'(u'(x')) = 0$, то $v'(g(y)) = 0$, следовательно, $h(v(y)) = 0$, иначе говоря, $v(y) = k(z)$ для некоторого $z \in \mathrm{Ker}(h)$, и, по определению, $w = d(z)$; это доказывает, что последовательность (*) точная в члене $\mathrm{Coker}(f)$. Мы видели в (i), что она точная в члене $\mathrm{Ker}(g)$, и в (ii), что она точная в члене $\mathrm{Coker}(g)$; это завершает доказательство утверждения (iii).

Следствие 1. *Предположим, что диаграмма* (4) *коммутативна и ее строки точные. Тогда*:

(i) *Если u', f и h инъективны, то g инъективно.*

(ii) *Если v, f и h сюръективны, то g сюръективно.*

Утверждение (i) представляет собой следствие утверждения (i) из предложения 2: действительно $\mathrm{Ker}(f) = 0$ и $\mathrm{Ker}(h) = 0$, следовательно, $\mathrm{Ker}(g) = 0$.

Утверждение (ii) представляет собой следствие утверждения (ii) из предложения 2: действительно, $\mathrm{Coker}(f) = 0$ и $\mathrm{Coker}(h) = 0$, следовательно, $\mathrm{Coker}(g) = 0$.

Следствие 2. *Предположим, что диаграмма* (4) *коммутативна и ее строки точные. При этих условиях*:

(i) *Если g инъективно и если f и v сюръективны, то h инъективно.*

(ii) *Если g сюръективно и если h и u' инъективны, то f сюръективно.*

Для доказательства утверждения (i) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} u(M) & \xrightarrow{w} & N & \xrightarrow{v} & P \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ u'(M') & \xrightarrow[w']{} & N' & \xrightarrow[v']{} & P', \end{array}$$

где f' – отображение, полученное ограничением отображения g на $u(M)$, w и w' – канонические вложения; ясно, что эта диаграмма коммутативна и что ее строки точные. Кроме того, w' инъективно и, по предположению, v сюръективно; имеем, следовательно, согласно предложению 2 (iii) точную последовательность.

$$\mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f');$$

поскольку g инъективно, а f' сюръективно, получаем, следовательно, что $\mathrm{Ker}(h) = 0$.

Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{w} & v(N) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h'}\downarrow \\ M' & \xrightarrow[u']{} & N' & \xrightarrow[w']{} & v'(N'), \end{array}$$

где на этот раз h' – отображение, полученное ограничением отображения h на $v(N)$, а отображения w и w' получены соответственно из отображений v и v'; эта диаграмма коммутативна, и ее строки точные. Кроме того, w сюръективно и, по предположению, u' инъективно, следовательно, согласно предложению 2 (iii), имеем точную последовательность

$$\mathrm{Ker}(h') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g);$$

поскольку g сюръективно и h' инъективно, получаем, следовательно, что $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

Следствие 3 (лемма о пяти гомоморфизмах). *Рассмотрим коммутативную диаграмму* A*-модулей*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{u_1} & M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 & \xrightarrow{u_4} & M_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\ M_1' & \xrightarrow{u_1'} & M_2' & \xrightarrow{u_2'} & M_3' & \xrightarrow{u_3'} & M_4' & \xrightarrow{u_4'} & M_5', \end{array}$$

в которой строки точные.

(i) *Если гомоморфизмы f_2 и f_4 инъективны и f_1 сюръективен, то f_3 инъективен.*

(ii) *Если гомоморфизмы f_2 и f_4 сюръективны и f_5 инъективен, то f_3 сюръективен.*

В частности, если f_1, f_2, f_4 и f_5 – изоморфизмы, то тем же свойством обладает и f_3.

Для доказательства утверждения (i) положим $\tilde{M}_2 = \mathrm{Coker}(u_1)$, $\tilde{M}'_2 = \mathrm{Coker}(u'_1)$ и обозначим через $\tilde{f}_2 : \tilde{M}_2 \to \tilde{M}'_2$ отображение, полученное из f_2. Из следствия 2 (i) вытекает, что $\tilde{f}_2$ инъективно. Применяя следствие 1 (i) к диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} M_2 & \xrightarrow{\tilde{u}_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} \\ \tilde{M}'_2 & \xrightarrow{\tilde{u}'_2} & M'_3 & \xrightarrow{u'_3} & M'_4, \end{array}$$

где отображения $\tilde{u}_2$ и $\tilde{u}'_2$ получены из u_2 и u'_2, видим, что f_3 инъективно.

Для доказательства утверждения (ii) положим $\tilde{M}_4 = \mathrm{Ker}(u_4)$, $\tilde{M}'_4 = \mathrm{Ker}(u'_4)$ и обозначим через $\tilde{f}_4 : \tilde{M}_4 \to \tilde{M}'_4$ отображение, индуцированное f_4. Из следствия 2 (ii) вытекает, что $\tilde{f}_4$ сюръективно. Применяя следствие 1 (ii) к диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{\tilde{u}_3} & \tilde{M}_4 \\ \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_4} \\ M'_2 & \xrightarrow{u'_2} & M'_3 & \xrightarrow{\tilde{u}'_3} & \tilde{M}'_4, \end{array}$$

где $\tilde{u}_3$ и $\tilde{u}'_3$ получены из u_3 и u'_3, видим, что f_3 сюръективно.

3. Плоские модули

Определение 1. Говорят, что A-модуль E *плоский*, если для всякой точной последовательности правых A-модулей и гомоморфизмов

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \tag{11}$$

последовательность **Z**-линейных отображений

$$M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{v \otimes 1} M'' \otimes_A E \tag{12}$$

точная.

Предложение 3. *Для того чтобы* A*-модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для всякого инъективного гомоморфизма* u: $M' \to M$ *правых* A*-модулей отображение* $u \otimes 1 : M' \otimes_A E \to M \otimes_A E$ *было инъективным.*

Если модуль E плоский и отображение u: $M' \to M$ инъективно, то последовательность $0 \to M' \xrightarrow{u} M$ точная, следовательно, последовательность $0 \to M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E$ также точная, и отображение $u \otimes 1$ инъективно. Обратно, рассмотрим точную последовательность (11); положим: $M''_1 = v(M)$, и пусть i: $M''_1 \to M''$ – каноническое вложение и p: $M \to M''_1$ – отображение $m \mapsto v(m)$. Последовательность $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$ точная; согласно II, p. 58, prop. 5, последовательность $M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{p \otimes 1} M''_1 \otimes_A E$ точная. Кроме того, $v = i \circ p$, следовательно, $v \otimes 1 = (i \otimes 1) \circ (p \otimes 1)$; если E удовлетворяет условию из формулировки предложения, то отображение $i \otimes 1$ инъективно, следовательно,

$$\mathrm{Ker}(v \otimes 1) = \mathrm{Ker}(p \otimes 1) = \mathrm{Im}(u \otimes 1),$$

и последовательность (12) точная.

Предложение 4. (i) *Если* $(E_i)_{i \in I}$ *– семейство* A*-модулей,* $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ *– их прямая сумма. Для того чтобы* A*-модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно чтобы каждый из модулей* E_i *обладал этим свойством.*

(ii) *Пусть* I *– направленное по возрастанию предупорядоченное множество,* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *– индуктивная система* A*-модулей относительно* I, $E = \varinjlim E_\alpha$ *– ее индуктивный предел. Если каждый из* A*-модулей* E_α *плоский, то* E *– плоский модуль.*

Пусть $M' \to M \to M''$ – точная последовательность правых A-модулей.

(i) Для того чтобы последовательность $\bigoplus_{\iota \in I} (M' \otimes_A E_\iota) \to \bigoplus_{\iota \in I} (M \otimes_A E_\iota) \to \bigoplus_{\iota \in I} (M'' \otimes_A E_\iota)$ была точной, необходимо и достаточно, чтобы каждая из последовательностей $M' \otimes_A E_\iota \to M \otimes_A E_\iota \to M'' \otimes_A E_\iota$ была точной (II, p. 13, prop. 7); это доказывает утверждение (i), поскольку $\oplus (M \otimes_A E_\iota)$ канонически отождествляется с $M \otimes_A E$ (II, p. 61, prop. 7).

(ii) По предположению, каждая из последовательностей $M' \otimes_A E_\iota \to M \otimes_A E_\iota \to M'' \otimes_A E_\iota$ точная, следовательно, такова же и последовательность $M' \otimes_A E \to M \otimes_A E \to M'' \otimes_A E$, поскольку переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным произведением (II, p. 93, prop. 7) и сохраняет точность (II, p. 91, prop. 3).

Примеры. 1. Ясно, что A_s является плоским A-модулем; из предложения 4 (i) следует, что всякий свободный A-модуль и, более общо, всякий проективный A-модуль является плоским (см. также II, p. 63, cor. 6).

*Обратно, всякий *конечно представимый плоский* A-модуль проективен (п. 5).*

2. Согласно предложению 4 (ii), всякий A-модуль, представляющий собой индуктивный предел направленной индуктивной системы свободных A-модулей, является плоским. Мы докажем обратное в п. 6.

3. Если кольцо A полупросто, то всякий A-модуль проективен (VIII, § 5, n° 1, prop. 1), следовательно, плоский.

4. *Если A – артиново локальное кольцо (не обязательно коммутативное), то A-модуль является плоским если и только если он свободен (AC, II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5; Коммутативная алгебра, II, с. 119, следствие 2 предложения 5).*

5. Если A – целостное кольцо, то его поле частных K является плоским A-модулем (II, p. 118, prop. 27).

6. *В AC, II и III (Коммутативная алгебра, II и III), мы изучим два важных примера плоских A-модулей, когда A – коммутативное кольцо: кольца частных $S^{-1}A$ и, когда A – нётерово, отделимое пополнение кольца A относительно J-адической топологии.*

7. Пусть элемент $a \in A$ таков, что отображение $a_A : x \mapsto ax$ кольца A в себя инъективно ("a не является левым делителем 0"). Если E – плоский A-модуль, то гомотетия a_E инъективна, поскольку отождествляется с отображением $a_A \otimes 1 : A_a \otimes_A E \to A_a \otimes_A E$. В частности, *если A – целостное кольцо, то всякий плоский A-модуль не имеет кручения.* Обратно, *если A – кольцо главных идеалов, то всякий A-модуль без кручения плоский*: действительно, если A-модуль E не имеет кручения, то всякий подмодуль конечного типа в E свободен (VII, § 4, n° 4, cor. 2 au th. 4; Алгебра, VII, с. 54, следствие 2 теоремы 2), и E представляет собой возрастающее направленное объединение плоских подмодулей, следовательно, является плоским (предложение 4 (ii)).

8. Пусть B – кольцо и $\rho : A \to B$ – гомоморфизм. Если E – плоский A-модуль, то B-модуль $E_{(B)} = B \otimes_A E$ плоский. Пусть, действительно, $u : N' \to N$ – инъективный гомоморфизм правых B-модулей; тогда $u \otimes_B 1_{E_{(B)}}$ канонически отождествляется с гомоморфизмом $u \otimes_A 1_E : N' \otimes_A E \to N \otimes_A E$, который инъективен, если E плоский.

9. Предположим, что $A = K[X, Y]$, где K – поле. Тогда максимальный идеал $\mathfrak{m}$, порожденный X и Y, является A-модулем без кручения, но не плоским. Рассмотрим, действительно, кольцо $B = A/(Y)$, которое изоморфно $K(X)$, следовательно, целостное. B-модуль $\mathfrak{m}_{(B)}$ изоморфен модулю $\mathfrak{m}/Y\mathfrak{m} = (X, Y)/(XY, Y^2)$, в котором класс Y периодический. Следовательно, $\mathfrak{m}_{(B)}$ не является плоским B-модулем, поэтому и $\mathfrak{m}$ не плоский.

10. Предположим, что кольцо A коммутативное. Пусть B – алгебра $A[X_1, \ldots, X_n]/(P)$, где P – ненулевой многочлен. Для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ в A обозначим через $\mathbf{k}(\mathfrak{p})$ поле частных целостного кольца $A/\mathfrak{p}$, через $E(\mathfrak{p})$ – алгебру $\mathbf{k}(\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_n]$ и через $P(\mathfrak{p})$ – образ P в $E(\mathfrak{p})$ при каноническом отображении.

Можно доказать, что для того чтобы алгебра B была плоским A-модулем, достаточно, чтобы $P(\mathfrak{p}) \neq 0$ для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ в A. Если A целостное, то это условие и необходимое.

*На геометрическом языке мы рассматриваем проекцию π: Spec (B) → Spec (A). Для всякого $\mathfrak{p} \in$ Spec (A) слой $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ отождествляется с подмногообразием $V_{\mathfrak{p}}$ аф-

финного пространства $\mathbf{A}^n_{k(\mathfrak{p})} = \mathrm{Spec}\,(E(\mathfrak{p}))$, определяемым многочленом $P(\mathfrak{p})$, и множество F тех простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых это подмногообразие совпадает со всем пространством (т.е. для которых $P(\mathfrak{p}) = 0$), представляет собой замкнутое подмножество в Spec (A). Предыдущее условие означает, что это замкнутое подмножество пусто, иначе говоря, что для всякого $\mathfrak{p}$ подмногообразия $V_{\mathfrak{p}}$ является гиперповерхностью в $\mathbf{A}^n_{k(\mathfrak{p})}$. ∎

11. * Пусть S и X – два комплексных аналитических пространства и $f\colon X \to S$ – некоторый морфизм. Говорят, что f *плоский* в точке x из X, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$, рассматриваемое как $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-модуль посредством гомоморфизма $f^*\colon \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, является плоским. Множество точек X, в которых морфизм f плоский, открыто в X, и ограничение f на это открытое множество является открытым отображением. Если X и S – связные аналитические многообразия конечной размерности, то морфизм f плоский (во всякой точке из X) в том и только том случае, если $f(X)$ – открытое множество в S и все слои $f^{-1}(s)$ для $s \in f(X)$ имеют одну и ту же размерность. ∎

4. Конечно представимые модули

Представлением (или *представлением длины* 1) A-модуля E называется точная последовательность A-модулей

$$L_1 \to L_0 \to E \to 0, \tag{13}$$

в которой L_0 и L_1 свободны.

Всякий A-модуль E допускает представление. Действительно, известно (II, p. 27, prop. 20), что существует сюръективный гомоморфизм $u\colon L_0 \to E$, где L_0 – свободный модуль; если R – ядро u, то существует также сюръективный гомоморфизм $v\colon L_1 \to R$, где L_1 – свободный модуль. Если рассматривать v как гомоморфизм L_1 в L_0, то последовательность $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ является точной по определению, откуда следует наше утверждение.

Если $\rho\colon A \to B$ – гомоморфизм колец, то представление (13) модуля E дает представление модуля $E_{(B)} \cong B \otimes_A E$:

$$B \otimes_A L_1 \to B \otimes_A L_0 \to B \otimes_A E \to 0, \tag{14}$$

ввиду II, p. 58, prop. 5 и того факта, что $B \otimes_A L$ – свободный B-модуль, когда L свободен.

Говорят, что представление (13) модуля E *конечное*, если свободные модули L_0 и L_1 имеют конечные базисы. Ясно, что если представление (13) конечное, то таково же и представление (14). Говорят, что E – *конечно представимый A-модуль*, если он допускает *конечное представление*.

Предложение 5. (i) *Всякий модуль, допускающий конечное представление, является модулем конечного типа.*

(ii) *Если кольцо A нётерово слева, то всякий A-модуль конечного типа допускает конечное представление.*

(iii) *Всякий проективный модуль конечного типа допускает конечное представление.*

Утверждение (i) тривиально следует из определений. Предположим, что A нётерово слева и E – модуль конечного типа. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $u\colon L_0 \to E$, где L_0 – свободный A-модуль, обладающий конечным базисом; ядро R гомоморфизма u имеет конечный тип, следовательно, существует сюръективный гомоморфизм $v\colon L_1 \to R$, где L_1 – свободный модуль с конечным базисом, и точная последовательность $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ служит конечным представлением для E, что даст утверждение (ii).

Наконец, предположим, что E – проективный модуль конечного типа; он является тогда прямым слагаемым некоторого свободного модуля конечного типа L_0 (II, p. 40, cor. 1); ядро R сюръективного гомоморфизма $L_0 \to E$ изоморфно тогда некоторому фактормодулю модуля L_0, следовательно, имеет конечный тип, и доказательство заканчивается как и выше.

Предложение 6. *Пусть* A – *кольцо*, E – *конечно представимый* A-*модуль. Для всякой точной последовательности*

$$0 \to F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E \to 0,$$

где G – *модуль конечного типа, модуль* F *имеет конечный тип.*

Пусть $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \to 0$ – некоторое конечное представление; если (e_i) – базис модуля L_0, то для всякого i существует такой элемент $g_i \in G$, что $p(g_i) = s(e_i)$; следовательно, гомоморфизм u: $L_0 \to G$, при котором $u(e_i) = g_i$, таков, что $s = p \circ u$. Так как $s \circ r = 0$, то $u(r(L_1)) \subset \operatorname{Ker} p$, и так как модуль $\operatorname{Ker} p$ изоморфен F, то мы видим, что существует гомоморфизм v: $L_1 \to F$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{r} & L_0 & \xrightarrow{s} & E & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_E} & & \\ F & \xrightarrow[j]{} & G & \xrightarrow[p]{} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативна. Так как гомоморфизм j инъективен, а s сюръективен, то можно применить предложение 2 (с. 9), т.е. имеется точная последовательность

$$\operatorname{Ker} 1_E \xrightarrow{d} \operatorname{Coker} v \to \operatorname{Coker} u \to \operatorname{Coker} 1_E.$$

Она показывает, что модуль $\operatorname{Coker} v$ изоморфен модулю $G/u(L_0)$, который, по предположению, конечного типа. Кроме того, имеем точную последовательность

$$0 \to v(L_1) \to F \to \operatorname{Coker} v \to 0,$$

и так как $v(L_1)$ и $\operatorname{Coker} v$ имеют конечный тип, то из нее заключаем, что тем же свойством обладает и F (II, p. 17, cor. 5).

Предложение 7. *Пусть* M – A-*модуль. Существует направленное по возрастанию упорядоченное множество* I *и индуктивная система относительно* I *конечно представимых модулей* $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, *для которой модуль* M *изоморфен* $\varinjlim M_\alpha$. Если M обладает системой порождающих из n элементов, то можно предполагать, что тем же свойством обладают и M_α.

Рассмотрим представление

$$A_S^{(K)} \xrightarrow{u} A_S^{(L)} \xrightarrow{v} M \to 0;$$

пусть I – множество таких пар $\alpha = (K', L')$, где K' (соответственно L') – конечное подмножество в K (соответственно в L), что u индуцирует отображение u_α подмодуля $A_S^{K'}$ модуля $A_S^{(K)}$ в подмодуль $A_S^{L'}$ модуля $A_S^{(L)}$; для $\alpha \in I$ пусть M_α – коядро u_α и v_α: $A_S^{L'} \to M_\alpha$ – каноническое отображение, так что получаем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} A_S^{(K)} & \xrightarrow{u} & A_S^{(L)} & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle i_\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle j_\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle f_\alpha}\uparrow & & \\ A_S^{K'} & \xrightarrow{u_\alpha} & A_S^{L'} & \xrightarrow{v_\alpha} & M_\alpha & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где i_α и j_α – канонические вложения, а f_α индуцировано отображением j_α при переходе к фактормодулям. Упорядочим множество I посредством отношения:

$$\alpha = (K', L') \leqslant \beta = (K'', L''), \text{ если } K' \subset K'', \ L' \subset L'';$$

для $\alpha \leqslant \beta$ пусть $\varphi_{\beta\alpha}$: $M_\alpha \to M_\beta$ – гомоморфизм, получаемый при переходе к фактормодулям из вложения $A_S^{L'}$ в $A_S^{L''}$. Тотчас проверяется, что упорядоченное множество I направленное, что $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ – индуктивная система A-модулей и что (φ_α) – индуктивная система A-гомоморфизмов. При переходе к индуктивному пределу получаем

коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A_s^{(K)} & \xrightarrow{u} & A_s^{(L)} & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ \varinjlim A_s^{K'} & \longrightarrow & \varinjlim A_s^{L'} & \longrightarrow & \varinjlim M_\alpha & \longrightarrow & 0\ ; \end{array} \tag{15}$$

строки этой диаграммы точные (II, p. 91, prop. 3); так как i и j биективны, то и φ биективно, что доказывает предложение.

5. Гомоморфизмы конечно представимых модулей

Пусть E – A-модуль. Если I – направленное предупорядоченное множество и (G_i, u_{ji}) – индуктивная система A-модулей относительно I, то канонические отображения $G_i \to \varinjlim G_i$ индуцируют гомоморфизмы $\mathrm{Hom}_A(E, G_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim G_i)$, что дает *канонический* гомоморфизм

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(E, G_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim_{i \in I} G_i). \tag{16}$$

Пусть B – другое кольцо, F – B-модуль, G – (A, B)-бимодуль; тогда определен (II, p. 75) канонический гомоморфизм:

$$\mathrm{Hom}_A(E, G) \otimes_B F \to \mathrm{Hom}_A(E, G \otimes_B F). \tag{17}$$

Предложение 8. а) *Если* A-*модуль* E *конечного типа* (*соответственно конечно представимый*), *то канонический гомоморфизм* (16) *инъективен* (*соответственно биективен*).

б) *Предположим, что* B-*модуль* F *плоский*; *если* A-*модуль* E *конечного типа* (*соответственно конечно представимый*), *то канонический гомоморфизм* (17) *инъективен* (*соответственно биективен*).

Докажем, например, б) (доказательство утверждения а) аналогично). Считаем A, B, F, G фиксированными и для всякого A-модуля E положим

$$T(E) = \mathrm{Hom}_A(E, G) \otimes_B F, \quad T'(E) = \mathrm{Hom}_A(E, G \otimes_B F)$$

и обозначим через ν_E гомоморфизм (17); для всякого гомоморфизма A-модулей v: $E \to E'$ положим $T(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_G) \otimes 1_F$ и $T'(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_G \otimes 1_F)$. Пусть $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} E \to 0$ – представление E; предполагаем, что свободный модуль L_0 (соответственно свободные модули L_0 и L_1) конечного типа. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to T(E) & \xrightarrow{T(w)} & T(L_0) & \xrightarrow{T(v)} & T(L_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_E} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_1}} \\ 0 \to T'(E) & \xrightarrow[T'(w)]{} & T'(L_0) & \xrightarrow[T'(v)]{} & T'(L_1) \end{array} \tag{18}$$

коммутативна, и ее вторая строка точная (II, p. 36, th. 1); кроме того, последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_0, G) \to \mathrm{Hom}(L_1, G)$$

точная (II, p. 36, th. 1), и так как F *плоский*, то первая строка в (18) – тоже точная последовательность (с. 12, определение 1). Известно, что гомоморфизм ν_{L_0} биективен (соответственно ν_{L_0} и ν_{L_1} биективны) (II, p. 75, prop. 2). Если предполагать только, что ν_{L_0} биективен, то из (18) следует, что гомоморфизм $\nu_{L_0} \circ T(w) = T'(w) \circ \nu_E$ инъективен и, таким образом, ν_E также инъективен. Если предполагать, что ν_{L_0} и ν_{L_1}

оба биективны, то из следствия 2 (ii) (с. 11) заключаем, что гомоморфизм ν_E сюръективен, и так как мы только что видели, что ν_E инъективен, то он биективен.

Следствие. *Всякий конечно представимый плоский модуль проективен.*

Действительно, пусть E – конечно представимый плоский A-модуль. Применяя б) к случаю B = A, $G = {}_s A_d$, F = E, видим, что канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(E, A) \otimes_A E \to \mathrm{Hom}_A(E, E)$$

сюръективен. Это влечет, что E проективен (II, p. 77, remarque 1).

Согласно предыдущему следствию и предложению 5, классы конечно представимых плоских модулей и конечно порожденных проективных модулей совпадают. Зато существуют конечно порожденные плоские модули, не являющиеся конечно представимыми и, следовательно, не являющиеся проективными (ср. с. 27, упражнение 17, см. тем не менее, с. 26, упражнения 13 и 14).

6. Структура плоских модулей

Лемма 2. *Пусть* I – *направленное по возрастанию упорядоченное множество,* $(E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ – *индуктивная система множеств относительно* I, E – *ее индуктивный предел и* $\varphi_\alpha: E_\alpha \to E$, $\alpha \in I$, – *канонические отображения. Пусть* $f: I \to I$ – *отображение, при котором* $f(\alpha) > \alpha$ *для* $\alpha \in I$, *и пусть заданы для каждого* $\alpha \in I$ *множество* L_α *и отображения* $u_\alpha: E_\alpha \to L_\alpha$ *и* $v_\alpha: L_\alpha \to E_{f(\alpha)}$, *удовлетворяющие условию:* $v_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha),\alpha}$. *Пусть* J – *упорядоченное множество, которое получается, если* I *наделить отношением:* "$\alpha \leqslant \beta$, *когда* $\alpha = \beta$ *или* $f(\alpha) \leqslant \beta$". *Если* $\alpha, \beta \in J$ *и* $\alpha \leqslant \beta$, *то пусть* $\psi_{\beta\alpha}: L_\alpha \to L_\beta$ – *такое отображение, что* $\psi_{\beta\alpha} = \mathrm{Id}$ *при* $\alpha = \beta$ *и* $\psi_{\beta\alpha} = u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha$ *при* $f(\alpha) \leqslant \beta$. *Если* $\alpha \in J$, *то пусть* $\psi_\alpha: L_\alpha \to E$ – *отображение* $\varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha$. *Тогда упорядоченное множество* J *направленное,* $(L_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ – *индуктивная система относительно* J, (ψ_α) – *индуктивная система отображений и отображение* $\psi: \varinjlim_{\alpha \in J} L_\alpha \to E$, *определяемое системой* (ψ_α), *биективно.*

Ясно, что J направленное. Если $\alpha, \beta \in J$ и $\alpha < \beta$, то

$$\psi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha} = \varphi_{f(\beta)} \circ v_\beta \circ u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha =$$

$$= \varphi_{f(\beta)} \circ \varphi_{f(\beta),\beta} \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha = \psi_\alpha;$$

аналогично, если $\alpha, \beta, \gamma \in J$ и $\alpha < \beta < \gamma$, то

$$\psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\beta)} \circ v_\beta \circ u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha =$$

$$= u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\beta)} \circ \varphi_{f(\beta),\beta} \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha = u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\alpha)} \circ v_\alpha = \psi_{\gamma\alpha}.$$

Докажем последнее утверждение: для всякого $\alpha \in J$ имеем:

$$\psi_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ \varphi_{f(\alpha),\alpha} = \varphi_\alpha,$$

следовательно, $\varphi_\alpha(E_\alpha) = \psi_\alpha(u_\alpha(E_\alpha)) \subset \psi_\alpha(L_\alpha)$, и ψ *сюръективно.* Пусть $\alpha \in J$, и пусть элементы $x, y \in L_\alpha$ таковы, что $\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(y)$, т.е. $\varphi_{f(\alpha)}(v_\alpha(x)) = \varphi_{f(\alpha)}(v_\alpha(y))$; существует индекс $\beta \in I$, $\beta \geqslant f(\alpha)$, для которого

$$\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(x)) = \varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(y)),$$

следовательно,

$$\psi_{\beta\alpha}(x) = u_\beta(\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(x))) = u_\beta(\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(y))) = \psi_{\beta\alpha}(y)$$

и ψ *инъективно.*

Теорема 1 (Д. Лазар[1]). *Для всякого* A*-модуля* E *следующие условия эквивалентны*:

(i) E *плоский.*

(ii) *Для всякого конечно представимого* A*-модуля* P *канонический гомоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_A(P, A) \otimes_A E \to \mathrm{Hom}_A(P, E)$$

сюръективен.

(iii) *Для всякого конечно представимого* A*-модуля* P *и всякого гомоморфизма* u: $P \to E$ *существуют свободный* A*-модуль конечного типа* L *и гомоморфизмы* v: $P \to L$ *и* w: $L \to E$, *для которых* $u = w \circ v$.

(iv) *Существуют направленное упорядоченное множество* J, *индуктивная система свободных модулей конечного типа* $(L_j)_{j \in J}$ *и изоморфизм* E *на* $\varinjlim L_j$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): это следует из предложения 4 (ii) (с. 12).

(i) $\Rightarrow$ (ii): это следует из предложения 8, б) (с. 16).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): пусть P – конечно представимый A-модуль и u: $P \to E$ – гомоморфизм; согласно (ii), существуют элементы $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Hom}_A(P, A)$, $w_1, \ldots, w_n \in E$, для которых $u(x) = \sum v_i(x) w_i$ при любом $x \in P$; если v: $P \to A^n$ – гомоморфизм с компонентами (v_i) и w: $A^n \to E$ – гомоморфизм $(a_i) \mapsto \sum a_i w_i$, то $u = w \circ v$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) предположим, что (iii) выполняется, и пусть $(E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ – индуктивная система (относительно направленного множества I) конечно представимых модулей с индуктивным пределом E (с. 15, предложение 7). Заменяя, если необходимо, множество I лексикографическим произведением $I \times N$ с $E_{(\alpha, n)} = E_\alpha$ для всякого n, можно предполагать, что I не содержит наибольшего элемента. Для каждого $\alpha \in I$ пусть L_α – свободный A-модуль конечного типа и u_α: $E_\alpha \to L_\alpha$, v'_α: $L_\alpha \to E$ – гомоморфизмы, для которых $v'_\alpha \circ u_\alpha$ – каноническое отображение φ_α: $E_\alpha \to E$; так как модуль L_α свободный конечного типа и в I нет наибольшего элемента, существуют индекс $\beta > \alpha$ и гомоморфизм v''_α: $L_\alpha \to E_\beta$, для которого $v'_\alpha = \varphi_\beta \circ v''_\alpha$; так как $\varphi_\beta \circ v''_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$ и так как модуль E_α конечно представимый, то из предложения 8, а) (с. 16), следует, что существует индекс $\gamma \geqslant \beta$, для которого $\varphi_{\gamma\beta} \circ v''_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$; положим $\gamma = f(\alpha)$, и пусть v_α – гомоморфизм $\varphi_{\gamma\beta} \circ v''_\alpha$ из L_α в $E_{f(\alpha)}$, имеем: $v_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha), \alpha}$. Теперь можно применить лемму 2, откуда следует (iv).

Следствие. *Пусть кольцо* A *коммутативно. Для всякого плоского* A*-модуля* E A*-модуль* $T(E)$, $S(E)$, $\Lambda(E)$, $T^n(E)$, $S^n(E)$, $\Lambda^n(E)$ [2] плоские.

Действительно, E представляет собой индуктивный предел направленной системы (L_j) свободных A-модулей конечного типа, поэтому $T(E)$ (соответственно $S(E)$ и т.д.) является индуктивным пределом направленной системы свободных A-модулей $T(L_j)$ (соответственно $S(L_j)$ и т.д.) и, следовательно, плоским модулем (ср. III, p. 61, prop. 6, p. 62, th. 1, p. 73, prop. 8, p. 75, th. 1, p. 83, prop. 9, p. 86, th. 1).

Замечание. Рассматривая в (ii) конечное представление $A_S^J \xrightarrow{c} A_S^I \to P \to 0$, получаем условие (ii′), также эквивалентное предыдущим:

(ii′) *Для всякой конечной матрицы* $(c_{ij})_{i \in I, j \in J}$ *с элементами из* A *всякое решение*

$$e = (e_i)_{i \in I} \in E^I$$

системы однородных линейных уравнений

$$\sum_{i \in I} c_{ij} e_i = 0, \qquad j \in J,$$

---

[1]) Эта теорема независимо доказана также В.Е. Говоровым (О плоских модулях // Сиб. мат. ж. – 1965. – Т. 6, № 2. – С. 300–304). – *Примеч. пер.*

[2]) $T(E)$, $S(E)$, $\Lambda(E)$ обозначают соответственно тензорную, симметрическую, внешнюю алгебру модуля E. – *Примеч. пер.*

можно записать в виде $z_1 b_1 + \ldots + z_n b_n$, *где* $b_1, \ldots, b_n \in E$ *и где* $z_r = (z_{r,i})_{i \in I}$ *при* $r = 1, \ldots, n$ – *некоторое решение в* A^I *системы уравнений*

$$\sum_{i \in I} c_{ij} z_{ri} = 0, \quad j \in J.$$

7. Инъективные модули

Определение 2. Говорят, что A-модуль E *инъективен*, если для всякой точной последовательности A-модулей и гомоморфизмов

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \tag{19}$$

последовательность Z-линейных отображений

$$\mathrm{Hom}_A(M'', E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(v,1)} \mathrm{Hom}_A(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(u,1)} \mathrm{Hom}_A(M', E) \tag{20}$$

точная.

Лемма 3. *Для того чтобы* A-*модуль* E *был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы для всякого инъективного* A-*линейного отображения* u: $M' \to M$ *отображение*

$$\mathrm{Hom}_A(u, 1): \mathrm{Hom}_A(M, E) \to \mathrm{Hom}_A(M', E)$$

было сюръективным.

Если E инъективен и если отображение u: $M' \to M$ инъективно, то последовательность $0 \to M' \xrightarrow{u} M$ точная, следовательно, последовательность $\mathrm{Hom}(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,1)} \mathrm{Hom}(M', E) \to 0$ также точная и отображение $\mathrm{Hom}(u, 1)$ сюръективно. Обратно, рассмотрим точную последовательность (19); положим $M_1'' = v(M)$, и пусть i: $M_1'' \to M''$ - каноническое вложение и p: $M \to M_1''$ – отображение $m \mapsto v(m)$. Последовательность $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M_1'' \to 0$ точная; согласно II, p. 36, th. 1, последовательность

$$\mathrm{Hom}_A(M_1'', E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(p,1)} \mathrm{Hom}_A(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,1)} \mathrm{Hom}_A(M', E)$$

точная. Кроме того, имеем: $\mathrm{Hom}(v, 1) = \mathrm{Hom}(p, 1) \circ \mathrm{Hom}(i, 1)$. Если E удовлетворяет условию леммы, то отображение $\mathrm{Hom}(i, 1)$ сюръективно, следовательно, образ $\mathrm{Hom}(v, 1)$ совпадает с образом $\mathrm{Hom}(p, 1)$ и последовательность (20) точная.

Замечание. Пусть E – инъективный A-модуль, u: $M' \to M$ и f: $M' \to E$ – гомоморфизмы A-модулей. Если $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, f$, то существует гомоморфизм g: $M \to E$, для которого $g \circ u = f$. Это следует из предыдущей леммы, примененной к инъективному гомоморфизму $M'/\mathrm{Ker}\, u \to M$, полученному из u.

Предложение 9. *Пусть* $(E_i)_{i \in I}$ – *семейство* A-*модулей*, $E = \prod E_i$ – *их произведение. Для того чтобы* A-*модуль* E *был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы каждый из* E_i *обладал этим свойством.*

Пусть u: $M' \to M$ – инъективный гомоморфизм A-модулей. Для того чтобы произведение гомоморфизмов $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M, E_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M', E_i)$ было сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы таким был каждый из гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(M, E_i) \to \mathrm{Hom}_A(M', E_i)$ (II, p. 10, prop. 5); это доказывает предложение, так как $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M, E_i)$ канонически отождествляется с $\mathrm{Hom}_A(M, E)$.

Предложение 10. *Пусть* E – A-*модуль. Для того чтобы* E *был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы для всякого идеала* $\mathfrak{a}$ *кольца* A *и всякого* A-*гомоморфизма* f: $\mathfrak{a} \to E$ *существовал такой элемент* $e \in E$, *что* $f(a) = ae$ *для всякого* $a \in \mathfrak{a}$.

Предположим, что E инъективен; пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A, f: $\mathfrak{a} \to E$ – A-гомоморфизм, и обозначим через i: $\mathfrak{a} \to A$ каноническое вложение. Тогда отображение

$$\mathrm{Hom}_A(i, 1): \mathrm{Hom}_A(A, E) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$$

сюръективно (определение 2); если гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_A(A, E)$ таков, что $f = g \circ i$ то

$$f(a) = g(a) = ag(1)$$

для всякого $a \in \mathfrak{a}$.

Обратно, предположим, что сформулированное условие выполняется, пусть M – A-модуль, N – подмодуль в M, u: N → E – A-гомоморфизм, и докажем, что существует A-гомоморфизм $\bar{u}$: M → E, продолжающий u (см. лемму 3). Пусть $\mathscr{P}$ – множество пар (P, v), где P – подмодуль в M, содержащий N, и v – гомоморфизм из P в E, продолжающий u. Множество $\mathscr{P}$, упорядоченное по отношению продолжения гомоморфизмов, *индуктивно*: если (P_j, v_j) – линейно упорядоченное семейство элементов из $\mathscr{P}$, то положим $Q = \cup P_j$, и пусть w: Q → E – единственное отображение, индуцирующее v_j на P_j для всякого j; тогда $(Q, w) \in \mathscr{P}$ и (Q, w) мажорирует (P_j, v_j) для всякого j. Пусть теперь (P, v) – некоторый максимальный элемент в $\mathscr{P}$ (E, III, p. 20, th. 2; Теория множеств, III, с. 177, теорема 2); достаточно доказать, что P = M. Пусть $x \in M$, и пусть $\mathfrak{a}$ – идеал, состоящий из всех таких элементов $a \in A$, что $ax \in P$; положим $f(a) = v(ax)$ для $a \in \mathfrak{a}$; получаем тем самым A-гомоморфизм f: $\mathfrak{a} \to E$. Пусть теперь e – элемент из E, для которого $f(a) = ae$ при всяком $a \in \mathfrak{a}$. Положим $P' = P + Ax$, и пусть v': $P' \to E$ – единственный A-гомоморфизм, при котором $v'(p + ax) = v(p) + ae$ для $p \in P$, $a \in A$; тогда (P', v') принадлежит $\mathscr{P}$ и мажорирует $(\mathscr{P}, v)$, следовательно, $P' = P$, т.е. $x \in P$, что завершает доказательство.

Следствие 1. *Если кольцо* A *нётерово слева, то прямая сумма инъективных* A*-модулей является инъективным модулем.*

Пусть $(E_i)_{i \in I}$ – семейство инъективных A-модулей, E – их прямая сумма, $\mathfrak{a}$ – идеал в A и u: $\mathfrak{a} \to E$ – A-гомоморфизм. Так как A нётерово, $\mathfrak{a}$ имеет конечный тип и, следовательно, каноническое отображение

$$\varphi: \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E_i) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$$

биективно; пусть (u_i) – прообраз u при φ. Так как каждый модуль E_i инъективен и семейство (u_i) обладает конечным носителем, то существует элемент $(e_i)_{i \in I}$ в E, для которого $u_i(a) = ae_i$ для всякого $a \in \mathfrak{a}$ и всякого $i \in I$, таким образом, $u(a) = a((e_i))$ для всякого $a \in \mathfrak{a}$, и E инъективен.

Замечание. Если всякая прямая сумма инъективных A-модулей является инъективным A-модулем, то кольцо A нётерово слева.

Предположим, что колько A целостное [1]). Говорят, что A-модуль E *делимый*, если гомотетия a_E сюръективна для всякого ненулевого элемента a из A.

Следствие 2. *Предположим, что кольцо* A *целостное.*

а) *Всякий инъективный* A*-модуль делим.*

б) *Всякий делимый* A*-модуль без кручения* (II, p. 115) *инъективен.*

в) *Если* A *– кольцо главных идеалов, то всякий делимый* A*-модуль инъективен.*

Если $a \in A$ – ненулевой элемеит, то гомотетия a_A инъективна; с другой стороны, для всякого A-модуля E гомотетия a_E канонически отождествляется с отображением

$$\mathrm{Hom}(a_A, 1): \mathrm{Hom}_A(A, E) \to \mathrm{Hom}_A(A, E),$$

следовательно, E делим, если и только если отображение $\mathrm{Hom}(a_A, 1)$ сюръективно для всякого ненулевого элемента $a \in A$. Утверждение а) следует, таким образом, из определения 2 (с. 19).

Пусть E – делимый A-модуль; предположим, что A – кольцо главных идеалов (соответственно E – модуль без кручения) и докажем, что E инъективен, применив предложение 10. Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A и f: $\mathfrak{a} \to E$ – A-гомоморфизм. Пусть $x \in \mathfrak{a}$ и $a = Ax$ (соответственно $x \neq 0$, если $\mathfrak{a} \neq 0$), и пусть $e \in E$ – элемент, для которого

[1]) То есть коммутативное кольцо без делителей нуля. – *Примеч. пер.*

$xe = f(x)$. Докажем, что

$$f(a) = ae$$

для всякого $a \in \mathfrak{a}$; это очевидно, если $a \in Ax$, откуда следует утверждение в случае, когда A – кольцо главных идеалов; если E – модуль без кручения и если $a \in \mathfrak{a}$, то $xf(a) = f(ax) = axe$, следовательно, $f(a) = ae$, так как $x \neq 0$, когда $a \neq 0$.

Примеры. 1. Если A – целостное кольцо, то его поле частных K – инъективный A-модуль. Если A – кольцо главных идеалов, то K/A – инъективный A-модуль.

2. Например, **Z**-модули **Q** и **Q**/**Z** инъективны.

3. Пусть A – кольцо главных идеалов и пусть a – *ненулевой* элемент из A. Тогда A/aA – инъективный A/aA-модуль (с. 27, упражнение 20).

8. Инъективные копорождающие

Предложение 11. *Пусть* B – *кольцо,* F – B-*модуль и* P – (B, A)-*бимодуль. Если* F – *инъективный* B-*модуль и* P – *плоский правый* A-*модуль, то* $\mathrm{Hom}_B(P, F)$ – *инъективный* A-*модуль.*

Пусть u: $M' \to M$ – инъективный гомоморфизм A-модулей. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(P, F)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(u,\,1)} & \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{Hom}_B(P, F)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} \\ \mathrm{Hom}_B(P \otimes_A M, F) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1_P \otimes u,\, 1_F)} & \mathrm{Hom}_B(P \otimes_A M', F), \end{array}$$

где β и β' – канонические изоморфизмы из II, p. 74. Так как P плоский над A, гомоморфизм $1_P \otimes u$: $P \otimes_A M' \to P \otimes_A M$ инъективен. Так как модуль F инъективный, то гомоморфизм $(1_P \otimes u,\ 1_F)$ сюръективен, следовательно, гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(u, 1)$ также сюръективен, а это доказывает, что $\mathrm{Hom}_B(P, F)$ – инъективный A-модуль (с. 19, лемма 3).

Определение 3. Говорят, что A-модуль E является *копорождающим*, если для всякого A-модуля M и всякого ненулевого элемента x из M существует A-гомоморфизм u: $M \to E$, при котором $u(x) \neq 0$.

Говорят, что A-модуль L является *порождающим*, если для всякого A-модуля M и всякого элемента x из M существует A-гомоморфизм u: $L \to M$, при котором $x \in u(L)$. Например, A-модуль A_S является порождающим.

Предложение 12. *Пусть* E – *инъективный* A-*модуль. Для того чтобы* E *был копорождающим, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Hom}_A(S, E) \neq 0$ *для всякого простого* A-*модуля* S.

Условие, очевидно, необходимо. Обратно, пусть M – A-модуль и x – ненулевой элемент из M, подмодуль Ax модуля M обладает простым фактормодулем S (VIII, § 2, n° 1, prop. 3; Алгебра, VIII, с. 146, предложение 2). Если $\mathrm{Hom}_A(S, E) \neq 0$, то $\mathrm{Hom}_A(Ax, E) \neq 0$ и существует гомоморфизм f: $Ax \to E$, при котором $f(x) \neq 0$; так как E инъективен, то f продолжается до гомоморфизма u из M в E и $u(x) = f(x) \neq 0$.

Пример. Инъективный **Z**-модуль **Q**/**Z** (пример 2, выше) является копорождающим. Действительно, всякий простой **Z**-модуль изоморфен модулю $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p \neq 0$, и модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ненулевой (он содержит, например, отображение, получаемое переходом к фактормодулям из гомоморфизма $x \mapsto x/p$ модуля **Z** в **Q**).

Предложение 13. *Пусть* B – *кольцо,* F – *инъективный* B-*модуль, являющийся копорождающим,* P – (B, A)-*бимодуль. Предположим, что* P *плоский над* A *и что* $P \otimes_A S \neq 0$ *для всякого простого* A-*модуля* S (* *т.е. строго плоский над* A *в смысле* AC, I (Коммутативная алгебра, I, с. 53) *). *Тогда* A-*модуль* $\mathrm{Hom}_B(P, F)$ *является копорождающим и инъективным.*

Действительно, A-модуль $\mathrm{Hom}_B(P, F)$ инъективен согласно предложению 11. С другой стороны, для всякого простого A-модуля S **Z**-модуль $\mathrm{Hom}_A(S, \mathrm{Hom}_B(P, F))$ изоморфен $\mathrm{Hom}_B(P \otimes_A S, F)$ и, следовательно, ненулевой, так как $P \otimes_A S \neq 0$ и B-модуль F является копорождающим; A-модуль $\mathrm{Hom}_B(P, F)$ является, таким образом, копорождающим согласно предложению 12.

Следствие 1. A-модуль $E_A = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *инъективен и является копорождающим.*

Применяем предложение 13 с $B = \mathbf{Z}$, $F = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (см. пример) и $P = A_d$.

Для всякого A-модуля M положим

$$I^0(M) = E_A^{\mathrm{Hom}(M, E_A)},$$

и пусть e_M: $M \to I^0(M)$ — гомоморфизм, сопоставляющий элементу $m \in M$ элемент $(\varphi(m))_{\varphi \in \mathrm{Hom}(M, E_A)} \in I^0(M)$.

Тогда:

Следствие 2. A-*модуль* $I^0(M)$ *инъективный и* A-*гомоморфизм* e_M: $M \to I^0(M)$ *инъективен.*

Действительно, $I^0(M)$ инъективный, так как E_A инъективный (с. 19, предложение 9); с другой стороны, e_M инъективен, так как E_A — копорождающий.

Следствие 3. *Всякий* A-*модуль изоморфен подмодулю инъективного* A-*модуля.*

Следствие 4. *Для того чтобы* A-*модуль* E *был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы всякий инъективный* A-*гомоморфизм* f: $E \to F$ *обладал* A-*линейной ретракцией.*

Предположим, что E инъективен, и пусть f: $E \to F$ — инъективный A-гомоморфизм. Тогда отображение $\mathrm{Hom}_A(f, 1_E)$: $\mathrm{Hom}_A(F, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E)$ сюръективно, следовательно, существует гомоморфизм $r \in \mathrm{Hom}_A(F, E)$, для которого $r \circ f = 1_E$ и r — A-линейная ретракция для f. Обратно, существует инъективный A-модуль I и инъективный A-гомоморфизм f: $E \to I$ (следствие 2); если f обладает A-линейной ретракцией, то E инъективен согласно предложению 9 (с. 19).

9. Инъективные оболочки

Определение 4. Пусть M — A-модуль. *Инъективная оболочка* модуля M — это пара (I, i), где I — инъективный A-модуль и i: $M \to I$ — гомоморфизм, обладающий следующим свойством:

(E) *для того чтобы подмодуль* P *в* I *был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы его полный прообраз* $i^{-1}(P)$ *был нулевым.*

Отметим, что (E) влечет инъективность i. Часто M отождествляют с подмодулем $i(M)$ в I, и тогда говорят, что I является инъективной оболочкой модуля M.

Пример 1. Предположим, что кольцо A целостное и M — A-модуль без кручения. Пусть K — поле частных кольца A и i: $M \to K \otimes_A M$ — канонический гомоморфизм. Тогда $(K \otimes_A M, i)$ — инъективная оболочка модуля M (II, p. 116, prop. 26, а также следствие 2 на с. 20).

Теорема 2. *Пусть* M — A-*модуль.*

а) M *обладает инъективными оболочками.*

б) *Если* (I, i) *и* (J, j) *— две инъективные оболочки модуля* M, *то существует изоморфизм* f: $I \to J$, *для которого* $f \circ i = j$.

Отметим, что гомоморфизм f, существование которого утверждается в б), вообще говоря не определен однозначно.

а) Можно предполагать, что M — подмодуль некоторого инъективного A-модуля E (следствие 3, выше). Рассмотрим упорядоченное по включению множество $\mathcal{F}$ подмодулей I в E, содержащих M и для которых каноническое вложение i: $M \to I$ удовлетворяет свойству (E). Так как $\mathcal{F}$ индуктивно, оно обладает максимальным элементом (E, III, p. 20; Теория множеств, III, с. 177); пусть I — некоторый максимальный элемент в $\mathcal{F}$. Достаточно доказать, что подмодуль I является *прямым множителем* для E. Пусть N — подмодуль в E, для которого $N \cap I = 0$ и который максимален относительно этого свойства (такой N существует согласно E, III, p. 20; Теория множеств, III, с. 117). Композиция гомоморфизмов

$$I \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E/N,$$

где u и v — канонические гомоморфизмы, инъективна; так как E инъективен, то существует гомоморфизм w: $E/N \to E$, для которого $w \circ v \circ u = u$, т.е. $w \circ v(x) = x$ для

$x \in I$. Положим $I' = \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(w \circ v)$, и пусть i': $M \to I'$ — каноническое вложение. Тогда $I \subset I'$; чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что i' удовлетворяет условию (E); это повлечет за собой, что $I = I'$ (ввиду максимальности I) и, следовательно, что $w \circ v$ — проекция E на I.

Пусть, таким образом, P — подмодуль в I', для которого $P \cap M = 0$. Имеем: $P = w \circ v(Q)$, где Q — некоторый подмодуль в E, содержащий N; кроме того,

$$Q \cap M = w \circ v(Q \cap M) \subset P \cap M = 0,$$

следовательно, $Q \cap I = 0$, так как i: $M \to I$ обладает свойством (E). Ввиду максимальности N, это влечет $Q = N$, т.е. $v(Q) = 0$, следовательно, $P = 0$, что и требовалось доказать.

б) Пусть (I, i) и (J, j) — две инъективные оболочки модуля M. Так как J инъективен, то существует гомоморфизм f: $I \to J$, для которого $f \circ i = j$; имеем:

$$i^{-1}(\mathrm{Ker} f) = \mathrm{Ker} j = 0,$$

следовательно, $\mathrm{Ker} f = 0$ и f инъективен. Тогда $f(I)$ — инъективный подмодуль в J и, следовательно, прямой множитель; так как j удовлетворяет (E), то $f(I) = J$ и f биективен.

Замечания. 1. Пусть (I, i) — инъективная оболочка модуля M и j: $M \to J$ — инъективный гомоморфизм из M в инъективный A-модуль J. Согласно предыдущему доказательству, существует *инъективный* гомоморфизм f: $I \to J$, для которого $f \circ i = j$.

2. Пусть (I, i) — инъективная оболочка модуля M. Отождествим M с подмодулем $i(M)$ в I. Для всякого подмодуля N в M существует инъективный подмодуль в I, служащий инъективной оболочкой модуля N (применить замечание 1 к N). Обратно, всякий инъективный подмодуль J в I является инъективной оболочкой модуля $J \cap M$.

Предложение 14. *Пусть* I — *ненулевой инъективный* A-*модуль. Следующие условия эквивалентны*:

(i) I *неразложим* (VII, § 4, n° 7, déf. 3);

(ii) 0 *не представляется в виде пересечения двух ненулевых подмодулей в* I;

(iii) I — *инъективная оболочка всех своих ненулевых подмодулей*;

(iv) *кольцо* $\mathrm{End}_A(I)$ *локальное* (VIII, § 1, n° 4, déf. 4).

(i) ⇒ (iii): пусть M — ненулевой подмодуль в I. Согласно замечанию 2, существует инъективный подмодуль I' в I, служащий инъективной оболочкой модуля M. Так как I' — ненулевое прямое слагаемое в I, то $I' = I$, если I неразложим;

(iii) ⇒ (ii): пусть E и F — два подмодуля в I, для которых $E \cap F = 0$. Если $E \neq 0$, то I — инъективная оболочка модуля E согласно (iii); следовательно, "$E \cap F = 0$" влечет и "$F = 0$"

(ii) ⇒ (i): тривиально.

(iv) ⇒ (i): это следует из VIII, § 1, n° 6, prop. 13.

(i) ⇒ (iv): предположим, что I неразложим. Отметим сначала, что всякий инъективный эндоморфизм f модуля I биективен (так как тогда $f(I)$ — ненулевое прямое слагаемое в I). Кроме того, всякий эндоморфизм f модуля I, ограничение которого на какой-либо ненулевой подмодуль E в I инъективно, инъективен (действительно, так как (i) ⇒ (iii), то I — инъективная оболочка модуля E; следовательно, "$E \cap \mathrm{Ker} f = 0$" влечет "$\mathrm{Ker} f = 0$"). Пусть теперь f — необратимый элемент из $\mathrm{End}_A(I)$; согласно VIII, § 1, n° 4, prop. 9, достаточно доказать, что элемент $1 - f$ обратим. Так как эндоморфизм f не инъективен, то $\mathrm{Ker} f \neq 0$; так как ограничение эндоморфизма $1 - f$ на $\mathrm{Ker} f$ инъективно, то $1 - f$ инъективен и, следовательно, биективен.

Следствие 1. *Отношение* "I *есть класс неразложимых инъективных* A-*модулей*" *является коллективизирующим.*

Действительно, согласно (iii), всякий неразложимый инъективный A-модуль является инъективной оболочкой некоторого моногенного A-модуля.

Следствие 2. *Пусть* M — A-*модуль,* I — *инъективная оболочка модуля* M. *Для того чтобы модуль* I *был неразложим, необходимо и достаточно, чтобы* 0 *не представлялся в виде пересечения двух ненулевых подмодулей в* M.

Условие необходимо согласно предложению 14 ((i) ⇒ (ii)). Обратно, если I – прямая сумма ненулевых подмодулей I_1 и I_2, то

$$I_1 \cap M \neq 0, \quad I_2 \cap M \neq 0 \quad \text{и} \quad (I_1 \cap M) \cap (I_2 \cap M) = 0.$$

Пример 2. Если A – нётерово коммутативное кольцо, то неразложимые инъективные A-модули – это в точности инъективные оболочки модулей $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал (с. 29, упражнение 27).

10. Структура инъективных модулей

Лемма 4. *Пусть* M – *ненулевой нётеров* A-*модуль*, I – *инъективная оболочка модуля* M. *Тогда* I *обладает неразложимым инъективным подмодулем.*

Можно, очевидно, предполагать, что M – подмодуль в I. Пусть N – подмодуль в M, для которого I не является инъективной оболочкой и который максимален относительно этого свойства. Согласно замечанию 2 (с. 23), существует подмодуль I_1 в I, служащий инъективной оболочкой модуля N; тогда I_1 – прямое слагаемое в I, пусть J – его дополнение. $J \neq 0$; покажем, что модуль J неразложим. Если J' – ненулевое прямое слагаемое в J, то $J' \cap M \neq 0$ и

$$(J' \cap M) \cap N \subset J' \cap I_1 = 0.$$

Подмодуль $N' = (J' \cap M) + N$ в M является *прямой суммой* $J' \cap M$ и N и, следовательно, строго содержит N. Кроме того, N' содержится в подмодуле $J' + I_1$, который является *прямой суммой* J' и I_1, следовательно, инъективен. В силу максимальности N это влечет, что $J' + I_1 = I$; следовательно, $J' = J$, и J неразложим.

Обозначим через $\mathcal{J}$ множество (с. 23, следствие 1) классов неразложимых инъективных A-модулей.

Напомним (с. 20, следствие 1), что если кольцо A нётерово слева, то всякая прямая сумма инъективных A-модулей представляет собой инъективный A-модуль.

Теорема 3. *Пусть* I – *инъективный* A-*модуль.*

а) *Если* I – *инъективная оболочка нётерова* A-*модуля* M, *то* I – *прямая сумма конечного семейства неразложимых* (*инъективных*) *подмодулей.*

б) *Если кольцо* A *нётерово слева, то* I – *прямая сумма некоторого семейства неразложимых* (*инъективных*) *подмодулей.*

в) *Если* I – *прямая сумма неразложимых* (*инъективных*) *подмодулей, то существует, и единственное, такое семейство кардинальных чисел* $(a_E)_{E \in \mathcal{J}}$, *что модуль* I *изоморфен модулю*

$$\bigoplus_{E \in \mathcal{J}} E^{(a_E)}.$$

Отметим сначала, что в) следует из предложения 14 (с. 23) и из VIII, § 1, n° 7, th. 2. Докажем а).

Пусть N – подмодуль в M, инъективные оболочки которого представляют собой прямую сумму конечного семейства неразложимых подмодулей и который максимален относительно этого свойства (такой существует, поскольку M нётеров). Согласно замечанию 2 (с. 23), существует подмодуль I_1 в I, служащий инъективной оболочкой модуля N. Если $I_1 = I$, то доказательство закончено; в противном случае пусть J – дополнение к I_1 в I. Тогда J – инъективная оболочка нётерова модуля $J \cap M$ (замечание 2, с. 23), следовательно, обладает неразложимым инъективным подмодулем J' (лемма 4). Тогда модуль $I_1 + J'$ инъективен, представляет собой прямую сумму конечного семейства неразложимых подмодулей и является инъективной оболочкой подмодуля $(I_1 + J') \cap M$ в M, который строго содержит N, откуда получаем противоречие.

Предположим, что A нётерово слева и докажем б). Пусть X – множество, представляющее собой объединение множеств $\mathrm{Hom}_A(E, I)$ для $E \in \mathcal{J}$. Каждому подмножеству Y в X следующим образом сопоставим A-модуль E_Y и A-гомоморфизм $f_Y: E_Y \to I$: Y есть объединение семейства $(Y(E))_{E \in \mathcal{J}}$, где $Y(E) \subset \mathrm{Hom}_A(E, I)$; положим

$$E_Y = \bigoplus_{E \in \mathcal{J}} E^{(Y(E))},$$

и ограничение f_Y на прямое слагаемое в E_Y, соответствующее элементу y из $Y(E) \subset \subset \mathrm{Hom}_A(E, I)$, есть y: $E \to I$. Пусть Y – подмножество в X, для которого гомоморфизм f_Y инъективен и которое максимально относительно этого свойства (такое подмножество существует согласно E, III, p. 20; Теория множеств, III, с. 177); достаточно доказать, что f_Y биективно. В противном случае пусть J – дополнение инъективного подмодуля $\mathrm{Im}(f_Y)$ в I; так как модуль J ненулевой, он обладает ненулевым нётеровым подмодулем (поскольку кольцо A предполагается нётеровым) и, следовательно, ненулевым инъективным подмодулем J', являющимся инъективной оболочкой нётерова модуля. Согласно а), J' – прямая сумма непустого конечного семейства неразложимых подмодулей. Следовательно, существует непустое конечное подмножество Y' в X, для которого $f_{Y'}$ отображает биективно $E_{Y'}$ на J'. Так как $\mathrm{Im}(f_Y) \cap J' = 0$, то $Y \cap Y' = \phi$ и гомоморфизм $f_{Y \cup Y'}$ инъективен; это противоречит максимальности Y и завершает доказательство.

Упражнения

1. Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} M & \to & N & \xrightarrow{t} & P & \to & Q \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ M' & \to & N' & \xrightarrow{t'} & P' & \to & Q' \end{array}$$

– коммутативная диаграмма A-модулей с точными строками; предположим, что гомоморфизм u сюръективен, а s инъективен. Доказать, что

$$\mathrm{Ker}(w) = t(\mathrm{Ker}(v)), \qquad \mathrm{Im}(v) = t'^{-1}(\mathrm{Im}(v)).$$

2. Пусть u: $M \to N$, v: $N \to P$ – два гомоморфизма A-модулей. Показать, что существует точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(v \circ u) \to \mathrm{Ker}(v) \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(v \circ u) \to \mathrm{Coker}(v) \to 0.$$

3. В диаграмме A-модулей

$$\begin{array}{ccc} P & \longleftarrow & M \\ \downarrow & \nearrow R \swarrow & \downarrow \\ N & \longleftarrow & Q \end{array}$$

обязательно ли коммутативность двух извлеченных из диаграммы треугольников влечет коммутативность диаграммы?

4. Пусть k – поле, $B = k[T]$, A – подкольцо $k[T^2, T^3] \subset k[T]$. Показать, что B – A-модуль без кручения, но не является плоским A-модулем.

5. Пусть k – поле, $C = k[X, Y]$; рассматриваются подкольца $A = k[X^4, Y^4]$, $B = k[X^4, X^3Y, XY^3, Y^4]$ и $\widetilde{B} = k[X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4]$ в C. Включения $A \subset B \subset \widetilde{B}$ позволяют определить на B и $\widetilde{B}$ структуры A-модуля. Показать, что $\widetilde{B}$ – плоский A-модуль, в то время как A-модуль B не является плоским.

6. Показать, что A-модуль E является плоским, если и только если он удовлетворяет следующему условию (ср. с. 18, замечание):

(ii″) Для всякого конечного семейства $(c_i)_{i \in I}$ элементов из A всякое решение $e = (e_i)_{i \in I}$ уравнения $\sum_{i \in I} c_i e_i = 0$ можно записать в виде $z_1 b_1 + \ldots + z_n b_n$, где $b_1, \ldots, b_n \in E$ и где, для $r = 1, \ldots, n$, $z_r = (z_{r,i})_{i \in I}$ является решением уравнения $\sum_{i \in I} c_i z_{r,i} = 0$.

7. Пусть E – моноид и S – устойчивое подмножество в E, регулярное и удовлетворяющее предположениям упражнения 17 из III, p. 121, так что существует "моноид частных" $\overline{E}$ и инъективный гомоморфизм ϵ: $E \to \overline{E}$. Пусть A – коммутативное кольцо. Гомоморфизм ϵ индуцирует гомоморфизм моноидных алгебр u: $A^{(E)} \to A^{(\overline{E})}$, который позволяет рассматривать $A^{(\overline{E})}$ как левый $A^{(E)}$-модуль. Показать, что этот модуль плоский над $A^{(E)}$ (представить $A^{(\overline{E})}$ как направленный индуктивный предел свободных $A^{(E)}$-модулей ранга 1).

*8. Пусть A – кольцо непрерывных функций с вещественными значениями на интервале $[0, 1]$.

а) Показать, что идеал функций, обращающихся в нуль в 0, является плоским A-модулем (показать, что он представляет собой направленный индуктивный предел идеалов Af, где f – функция, которая обращается в нуль только в 0).

б) Показать, что идеал I функций, обращающихся в нуль в окрестности 0, является проективным A-модулем (показать, что существует последовательность $(f_n)_{n \geqslant 1}$, $f_n \in I$, удовлетворяющая

условиям: $\mathrm{Supp}(f_n) \subset \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right]$ и $\sum_n f_n(x) = 1$ при $x \neq 0$; вывести отсюда, что всякий элемент h из I записывается в виде $h = \sum_n (f_n h) e_n$, где $e_n = \sum_{r \leqslant n+1} f_r$, и использовать II, p. 46, prop. 12. *

9. Пусть P – A-модуль. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Для того чтобы последовательность $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ правых A-модулей была точной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$M' \otimes_A P \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A P \xrightarrow{v \otimes 1} M'' \otimes_A P$$

была точной.

β) P плоский и $M \otimes_A P \neq 0$ для всякого ненулевого правого A-модуля M.

γ) P плоский и канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \otimes_A P, N \otimes_A P)$$

инъективен для любых правых A-модулей M, N.

δ) P плоский и $\mathfrak{m} P \neq P$ для всякого максимального правого идеала $\mathfrak{m}$ в A.

При выполнении этих условий говорят, что P – *строго плоский* A-модуль.

10. а) Показать, что строго плоский модуль является точным (II, p. 28; Алгебра, II, с. 197).

б) Z-модуль Q точный и плоский, но не строго плоский.

в) Пусть (p_n) – строго возрастающая последовательность простых чисел, и пусть A – прямое произведение колец $\prod_n \mathbf{Z}/p_n\mathbf{Z}$. Показать, что прямая сумма E абелевых групп $\mathbf{Z}/p_n\mathbf{Z}$ представляет собой точный проективный A-модуль, но не является строго плоским A-модулем (заметить, что E-идеал в A, для которого $E^2 = E$).

11. Пусть $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ – точная последовательность A-модулей. Предположим, что модули P′ и P″ плоские и что один из них строго плоский. Показать, что P строго плоский.

12. Пусть ρ: $A \to B$ – гомоморфизм колец, превращающий B в строго плоский правый A-модуль, пусть M – некоторый A-модуль.

а) Показать, что для того чтобы M был модулем конечного типа (соответственно конечно представимым), необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладал B-модуль $B \otimes_A M$.

б) Предположим, что $\rho(A)$ содержится в центре кольца B. Показать, что модуль M плоский (соответственно строго плоский, проективный конечного типа) если и только если B-модуль $B \otimes_A M$ обладает указанным свойством.

13. Показать, что плоский модуль конечного типа P над целостным кольцом A проективен (рассмотреть представление $0 \to R \xrightarrow{j} L \xrightarrow{p} P \to 0$, где L – свободный модуль конечного типа; выбрать подмодуль конечного типа R′ в R, для которого R/R′ – периодический модуль, и применить теорему 1, с. 18).

¶ 14. а) Пусть $0 \to R \to L \to E \to 0$ – точная последовательность A-модулей, где L – свободный A-модуль; пусть (e_α) – базис L. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) E – плоский A-модуль.

β) Для всякого $x \in R$, если $\mathfrak{a}_x$ – правый идеал, порожденный компонентами x относительно базиса (e_α), $x \in \mathfrak{a}_x R$.

γ) Для всякого $x \in R$ существует гомоморфизм u_x: $L \to R$, при котором $u_x(x) = x$.

δ) Для всякой конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов из R существует такой гомоморфизм u: $L \to R$, что $u(x_i) = x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. (Использовать теорему 1, с. 18).

б) Пусть $\mathfrak{r}$ – радикал кольца A, и пусть $0 \to R \to L \to E \to 0$ – точная последовательность A-модулей, в которой L свободен. Предположим, что E плоский и что R содержится в $\mathfrak{r}L$. Показать, что тогда $R = 0$ (в обозначениях из пункта а) заметить что $\mathfrak{a}_x$ – идеал конечного типа и что $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_x \mathfrak{r}$).

в) Пусть E – плоский A-модуль конечного типа; предположим, что существует двусторонний идеал $\mathfrak{b}$ кольца A, содержащийся в его радикале, для которого $E/\mathfrak{b}E$ – свободный $A/\mathfrak{b}$-модуль. Показать, что тогда E – свободный A-модуль (заметить, что существует свободный A-модуль конечного типа L, для которого модуль $L/\mathfrak{b}L$ изоморфен $E/\mathfrak{b}E$ и применить б)). В частности, всякий плоский модуль конечного типа над *локальным* кольцом свободен.

15. Пусть A – кольцо, a – элемент из A. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) $a \in aAa$,

β) Aa – прямое слагаемое в модуле A_s.

γ) A_s/Aa – плоский A-модуль.

δ) Для всякого правого идеала $\mathfrak{b}$ в A имеет место равенство $\mathfrak{b} \cap Aa = \mathfrak{b}a$.

16. Пусть A – кольцо. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Всякий элемент $a \in A$ удовлетворяет эквивалентным свойствам из упражнения 15.

β) Всякий левый идеал конечного типа является прямым множителем в A_s.

γ) Всякий левый A-модуль плоский.

δ) Всякий правый A-модуль плоский.

В этом случае говорят, что A – *абсолютно плоское* кольцо (ср. VIII, § 8, exercice 15; Алгебра, VIII, стр. 202, упражнение 15 [1]).

17. Пусть A – абсолютно плоское кольцо (упражнение 16).

а) Пусть P – проективный A-модуль. Показать, что всякий подмодуль конечного типа в P является прямым множителем в P (свести к случаю, когда P свободный конечного типа).

б) Показать, что всякий проективный модуль представляет собой прямую сумму моногенных подмодулей, изоморфных моногенным идеалам в A. (Использовать теорему Капланского (II, p. 183, exercice 2) для сведения к случаю, когда P обладает счетным семейством порождающих, затем использовать а).)

в) Показать, что всякий идеал в A, порожденный счетным семейством порождающих, проективен.

г) Дать пример абсолютно плоского кольца A и непроективного A-модуля конечного типа.

¶ 18. Пусть M – A-модуль. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) M конечного типа (соответственно конечно представим).

β) Для всякой индуктивной системы A-модулей (N_i, u_{ji}) относительно направленного предупорядоченного множества I канонический гомоморфизм $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, N_i) \to \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim_{i\in I} N_i)$ инъективен (соответственно биективен).

γ) Для всякого семейства $(P_j)_{j\in J}$ правых A-модулей канонический гомоморфизм

$$\Big(\prod_{j\in J} P_j\Big) \otimes_A M \to \prod_{j\in J} (P_j \otimes_A M)$$

(II, p. 61) сюръективен (соответственно биективен).

δ) Для всякого множества I канонический гомоморфизм $A_d^I \otimes_A M \to M^I$ сюръективен (соответственно биективен).

19. Пусть A и B – два кольца, $\varphi: A \to B$ – гомоморфизм, M – B-модуль. Наделим $B \otimes_A M$ и $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ структурами левого B-модуля, получаемыми соответственно из структур левого и правого B-модуля на B. Говорят, что M *проективен относительно* A, или *φ-проективен*, если каноническая сюръекция $B \otimes_A M \to M$ обладает B-линейным сечением; говорят, что M *инъективен относительно* A, или *φ-инъективен*, если каноническое вложение

$$M \to \mathrm{Hom}_A(B, M)$$

обладает B-линейной ретракцией.

а) Если M проективен (соответственно инъективен) как A-модуль и φ-проективен (соответственно φ-инъективен), то M – проективный (соответственно инъективный) B-модуль.

б) Для всякого A-модуля N B-модуль $B \otimes_A N$ (соответственно $\mathrm{Hom}_A(B, N)$) φ-проективен (соответственно φ-инъективен).

в) Предположим, что $\varphi(A)$ содержится в центре B. Пусть N – A-модуль, P – φ-проективный B-модуль. Показать, что B-модуль $P \otimes_A N$ (соответственно правый B-модуль $\mathrm{Hom}_A(P, N)$) φ-проективен (соответственно φ-инъективен).

20. Пусть A – кольцо главных идеалов, a – ненулевой элемент в A, $B = A/Aa$. Показать, что B-модуль B_s инъективен.

21. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Кольцо A нётерово.

β) Всякий индуктивный предел инъективных A-модулей является инъективным A-модулем.

γ) Всякая прямая сумма инъективных A-модулей является инъективным A-модулем.

(Для доказательства импликации $\gamma) \Rightarrow \alpha)$ рассмотреть возрастающую последовательность $(\mathfrak{a}_n)_{n\geqslant 1}$ левых идеалов в A, $\mathfrak{a} = \bigcup_n \mathfrak{a}_n$ и I_n – инъективная оболочка A-модуля $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n$. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{a}$ в $\oplus I_n$ представляет собой ограничение некоторого гомоморфизма f: $A \to \oplus I_n$; рассмотреть $f(1)$).

22. Пусть A – кольцо главных идеалов, K – его поле частных, π – один из экстремальных элементов в A. Показать, что π-примарная компонента A модуля K/A представляет собой инъективную оболочку A-модуля $A/\pi^n A$ для всякого $n \geqslant 1$.

¶ 23. Пусть I – инъективный A-модуль, E – кольцо $\mathrm{End}_A(I)$, $\mathfrak{r}$ – множество всех элементов u из E, для которых I – инъективная оболочка подмодуля $\mathrm{Ker}(u)$.

а) Показать, что $\mathfrak{r}$ – двусторонний идеал и что кольцо $E/\mathfrak{r}$ абсолютно плоское (упражнение 16). (Пусть u – элемент из E, N – подмодуль в I, для которого $N \cap \mathrm{Ker}(u) = 0$ и максимальный относительно этого свойства; показать, что существует элемент $v \in E$, для которого $vu(x) = x$ при любом $x \in N$ и вывести отсюда, что $uvu - u \in \mathfrak{r}$.

б) Показать, что $\mathfrak{r}$ – радикал кольца E (включение $(E) \subset \mathfrak{r}$ следует из а); показать, что для всякого $u \in \mathfrak{r}$ отображение $1 - u$ биективно).

в) Предположим, что I – прямая сумма конечного семейства неразложимых инъективных модулей. Показать, что кольцо $E/\mathfrak{r}$ полупросто.

[1]) Здесь такие кольца называются *регулярными*. – *Примеч. пер.*

¶ 24. Пусть i: A → I – инъективная оболочка A-модуль A_s. Положим E = $End_A(I)$ и B = $End_E(I)$, так что B представляет собой бикоммутант A-модуля I(VIII, § 3, déf. 1; Алгебра, VIII, с. 122, определение 4). Рассматриваем A как подкольцо в B. Обозначим через j: B → I и p: E → I отображения, определяемые формулами

$j(b) = b(i(1))$ и $p(u) = u(i(1))$ для $b \in B$, $u \in E$.

а) Показать, что p – сюръекция и j – вложение.

б) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Отображение p биективно.

β) Отображение j биективно.

γ) A-модуль B инъективен.

Если эти условия выполняются, то отображение $j^{-1} \circ p$ осуществляет изоморфизм кольца E на кольцо, противоположное B.

в) Пусть $\mathfrak{F}$ – множество левых идеалов $\mathfrak{a}$ в A, для которых $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \neq (0)$ при любом ненулевом левом идеале $\mathfrak{b}$. Обозначим через s(A) множество элемеитов a из A, для которых существует такой идеал $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, что $\mathfrak{a}a = 0$. Показать, что s(A)– двусторонний идеал в A.

г) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $s(A) = 0$.

β) Кольцо E без радикала.

γ) Кольцо B абсолютно плоское.

Если эти условия выполняются, то удовлетворяются эквивалентные свойства из б).

(Пусть s(I) – множество элементов x из I, для которых существует такой идеал $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, что $\mathfrak{a}x = 0$. Используя упражнение 23, доказать, что $p^{-1}(s(I))$ совпадает с радикалом $\mathfrak{r}$ кольца E, откуда импликация β) ⇒ α). Показать далее, что из α) вытекает равенство $\mathfrak{r} = \mathrm{Ker}(p) = 0$, а это влечет за собой справедливость β) и γ) (принимая во внимание упражнение 23), а также условия α из б). Показать, наконец, что из γ) следует α).)

д) Если A нётерово слева, то идеал s(A) нильпотентен (доказать сначала, что всякий элемент a из s(A) нильпотентен, рассматривая левые аннуляторы его степеней a^n, затем использовать из VIII, § 9, exercice 8, b)).

¶ 25. Предположим, что кольцо A нётерово слева и не содержит нильпотентных двусторонних идеалов.

а) Доказать, что кольцо B, определенное в упражнении 24, *полупросто* (*"теорема Голди"*; использовать упражнение 23, в), и упражнение 24, г) и д)). Если, кроме того (0) – первичный двусторонний идеал в A (VIII, § 8, exercice 19; Алгебра, VIII, с. 236, упражнение 6[1]), показать, что B простое.

б) Отождествим A с подкольцом в B. Доказать следующие свойства:

(i) Всякий элемент из A, регулярный слева, обратим в B (следовательно, регулярен в A).

(ii) Всякий элемент b из B может быть записан в виде $s^{-1}a$, где $s \in A$, $a \in A$ и s регулярный. Иногда говорят, что B – *левое полное кольцо частных* кольца A.

(Для доказательства утверждения (ii) свести его к случаю, когда B простое. Показать, что тогда идеал (0) в A первичный. Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал из $\mathfrak{F}$, a – элемент из $\mathfrak{a}$, для которого правый идеал aB максимален среди идеалов a'B ($a' \in \mathfrak{a}$), x – элемент из B, для которого $axa = a$. Доказать, что $B(1 - xa) \subset a$B, откуда

$(B(1 - ax) \cap \mathfrak{a}) \cdot (B(1 - xa) \cap \mathfrak{a}) = (0)$;

вывести отсюда, что a регулярен. Закончить, взяв в качестве $\mathfrak{a}$ множество элементов $a \in A$, для которых $ab \in A$.)

в) Предположим, что всякий неиулевой элемент в A регулярен. Показать, что B – тело, представляющее собой левое тело частных для A (ср. I, p. 155, exercice 15).

¶ 26. а) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Кольцо A нётерово справа и A-модуль A_s инъективен.

α^0) A нётерово слева и A-модуль A_d инъективен.

β) Кольцо A *самоинъективно* (VIII, § 2, exercice 11).

(Доказать, что α) влечет $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^0$ для всякого правого идеала $\mathfrak{r}$. Показать затем, что радикал r(A) нильпотентен, и вывести отсюда, используя упражнение 23, что A артиново справа. Доказать затем, что сопряженный модуль простого левого модуля является простым. Вывести отсюда, что A нётерово слева и, наконец, что A самоинъективно.)

б) Показать, что кольцо A самоинъективно в том и только том случае, если всякий инъективный A-модуль проективен и всякий проективный A-модуль инъективен.

¶ 27. Предположим, что кольцо A нётерово слева.

а) Пусть I – неразложимый инъективный A-модуль. Показать, что множество аннуляторных идеалов ненулевых подмодулей в I обладает наибольшим элементом $\mathfrak{P}$(I), который представляет собой *первичный* двусторонний идеал (VIII, § 8, exercice 19; Алгебра, VIII, с. 236, упражнение 6[1]).

б) Показать, что для всякого первичного двустороннего идеала $\mathfrak{p}$ в A существует неразложимый инъективный A-модуль I, для которого $\mathfrak{P}$(I) = $\mathfrak{p}$ (рассмотреть неразложимый прямой множитель инъективной оболочки модуля A/$\mathfrak{p}$).

---

[1]) Здесь вместо термина "первичный" использован термин "простой"; однако в русской литературе последний термин обычно применяется лишь к идеалам в коммутативных кольцах. – *Примеч. пер.*

в) Предположим, что кольцо A коммутативное. Показать, что всякий неразложимый инъективный A-модуль I представляет собой инъективную оболочку модуля $A/\mathfrak{N}(I)$. Вывести отсюда, что отображение $I \mapsto \mathfrak{N}(I)$ определяет биекцию множества $\mathcal{J}$ классов неразложимых инъективных A-модулей на множество простых идеалов в A. Обратная биекция сопоставляет идеалу $\mathfrak{p}$ инъективную оболочку модуля $A/\mathfrak{p}$.

г) Показать, что для того чтобы отображение $I \mapsto \mathfrak{N}(I)$ множества $\mathcal{J}$ на множество первичных двусторонних идеалов кольца A было биективным, достаточно чтобы A удовлетворяло следующему условию (H):

(H) Для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ в A существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_k$ в $A/\mathfrak{a}$, что

$$\mathrm{Ann}(A/\mathfrak{a}) = \bigcap_i \mathrm{Ann}(x_i).$$

д) Показать, что условие (H) удовлетворяется в следующих случаях:

α) Все левые идеалы в A являются двусторонними.

β) A артиново.

γ) Центр Z кольца A является нётеровым кольцом и A — Z-модуль конечного типа.

е) Пусть k — поле, Q^+ — аддитивный моноид рациональных чисел $\geqslant 0$, A — кольцо нормирования w поля частных моноидной алгебры $k^{(Q^+)}$ построенное в Коммутативной алгебре, с. 448, пример 6, a — ненулевой элемент из A, I — инъективная оболочка модуля A/Aa. Показать, что A-модуль I неразложим, но не содержит никакого подмодуля, изоморфного $A/\mathfrak{p}$ с простым $\mathfrak{p}$ (заметить, что множество идеалов в A линейно упорядочено и что A содержит только два простых идеала).

28. Пусть A — нётерово кольцо, M — A-модуль, I — инъективная оболочка модуля M, представляющая собой прямую сумму некоторого семейства $(I_\alpha)_{\alpha \in J}$ неразложимых подмодулей. Обозначим через Ass (M) множество первичных двусторонних идеалов $\mathfrak{N}(I_\alpha)$ для $\alpha \in J$ (упражнение 27); если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, то говорят, что идеал $\mathfrak{p}$ *ассоциирован с* M.

а) $\mathrm{Ass}(M) \neq \phi$, если $M \neq 0$; если M конечного типа, то множество Ass (M) конечное.

б) Показать, что первичный двусторонний идеал $\mathfrak{p}$ ассоциирован с M в том и только том случае, если M содержит такой подмодуль N, что $\mathrm{Ann}(N') = \mathfrak{p}$ для всякого ненулевого подмодуля N' в N. Если A коммутативно, то $\mathfrak{p}$ ассоциировано с M в том только том случае, если M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$.

в) Пусть M' — подмодуль в M. Показать, что

$$\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M/M').$$

г) Положим $J_\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{N}(I_\alpha) = \mathfrak{p}} I_\alpha$ и $Q(\mathfrak{p}) = (\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} J_\mathfrak{q}) \cap M$. Показать, что $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} Q(\mathfrak{p}) = 0$ и $\bigcap_{\mathfrak{p} \in E} Q(\mathfrak{p}) \neq 0$ для всякого подмножества E в Ass (M), отличного от Ass (M). Для всякого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ имеем $\mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$.

д) Пусть a — элемент из центра A. Показать, что для того чтобы гомотетия относительно a была инъективна в M, необходимо и достаточно, чтобы a не принадлежал никакому из ассоциированных с M первичных идеалов.

* 29. Предположим, что кольцо A коммутативно и нётерово. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A.

а) Пусть H — A-модуль, в котором всякий элемент из H аннулируется некоторой степенью $\mathfrak{a}$. Показать, что для инъективности H достаточно, чтобы для всякого целого $n \geqslant 1$, всякого A-модуля M конечного типа, *аннулируемого* идеалом $\mathfrak{a}^n$, и всякого подмодуля M' в M естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, H) \to \mathrm{Hom}_A(M', H)$ был сюръективен.

(Использовать тот факт, что для всякого идеала $\mathfrak{b}$ кольца A существует целое число $k \geqslant 0$, при котором $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k \subset \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ (AC, III, § 3, n° 1, сог. 2; Коммутативная алгебра, III, с. 244, следствие 2).

б) Пусть M — инъективный A-модуль. Для $n \geqslant 1$ обозначим через H_n подмодуль в M, образованный элементами аннулируемыми идеалом $\mathfrak{a}^n$; положим $H = \cup H_n$. Показать, что H — инъективный A-модуль.

в) Показать, что всякий элемент инъективной оболочки модуля $A/\mathfrak{a}$ аннулируется некоторой степенью идеала $\mathfrak{a}$.

30. Предположим, что кольцо A локальное, коммутативное и нётерово; обозначим через $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть I — A-модуль, в котором всякий элемент аннулируется степенью $\mathfrak{m}$. Для всякого A-модуля M обозначим через T(M) A-модуль $\mathrm{Hom}_A(M, I)$ и через c_M: $M \to T(T(M))$ — гомоморфизм, определяемый по формуле

$$(c_M(m))(u) = u(m) \quad \text{для } m \in M,\ u \in T(M).$$

Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Для всякого A-модуля M конечной длины A-модуль T(M) имеет конечную длину и гомоморфизм c_M: $M \to T(T(M))$ биективен.

β) Для всякого A-модуля M конечной длины $\mathrm{long}\, T(M) = \mathrm{long}\, M$.

γ) A-модуль I инъективен и A-модули k и $T(k)$ изоморфны.

δ) A-модуль I изоморфен инъективной оболочке A-модуля k.

Когда эти условия удовлетворяются, говорят иногда, что I — *дуализирующий модуль* для кольца A.

(Показать, что свойство γ) эквивалентно каждому из трех других; чтобы увидеть, что γ) следует из α) или β), использовать упражнение 29).

31. В предположениях предыдущего упражнения пусть B – коммутативное и нётерово локальное кольцо, и пусть ρ: A → B – гомоморфизм колец, превращающий B в A-модуль конечного типа. Если I – дуализирующий модуль для A, то показать, что B-модуль $\mathrm{Hom}_A(B, I)$ дуализирующий для B. В частности, для всякого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A подмодуль в I, образованный элементами, аннулируемыми идеалом $\mathfrak{a}$, представляет собой дуализирующий модуль для $A/\mathfrak{a}$.

32. а) Сохраняем предположения упражнения 30; предположим, кроме того, что A содержит поле k_0, над которым k является векторным пространством конечной размерности. Показать, что A-модуль $I = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{k_0}(A/m^n, k_0)$ дуализирующий для A.

б) Пусть k – поле характеристики нуль, B – кольцо формальных рядов $k[[T_1, \ldots, T_n]]$. Наделим группу $I = k[X_1, \ldots, X_n]$ структурой B-модуля, положив $T_i \cdot P = \partial P/\partial X_i$ для всякого $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Показать, что I – инъективная оболочка B модуля k.

§ 2. КОМПЛЕКСЫ A-МОДУЛЕЙ

В этом параграфе через A *обозначается кольцо. Когда мы будем говорить об* A*-модулях без уточнений, это всегда будет относиться к левым* A*-модулям.*

Мы будем называть градуированными модулями градуированные модули типа Z (II, p. 164). *Если* M – *градуированный* A*-модуль с градуировкой* $(M_n)_{n \in Z}$, *то полагаем* $M^n = M_{-n}$ *и говорим, что* M_n (соответственно M^n) – *однородная компонента нижней степени* n (соответственно верхней степени n) *модуля* M. *Если* u: M → N – *градуированный гомоморфизм степени* p *градуированных* A*-модулей* (II, p. 166), *то обозначаем через* u_n: $M_n \to M_{n+p}$ (соответственно u^n: $M^n \to M^{n-p}$) *гомоморфизм, получаемый из* u; *он называется однородной компонентой нижней* (соответственно *верхней*) *степени* n *гомоморфизма* u; *говорят также, что* u – *гомоморфизм нижней степени* p *или верхней степени* – p.

1. Комплексы A-модулей

Определение 1. *Дифференциальный комплекс* A*-модулей* – это пара (C, d), образованная градуированным A-модулем C и градуированным эндоморфизмом d: C → C нижней степени –1, для которого $d \circ d = 0$.

Говорят также короче: комплекс A-модулей, или A-комплекс, или комплекс. Часто пишут C вместо (C, d); эндоморфизм d называют *дифференциалом* комплекса (C, d) или, злоупотребляя языком, комплекса C.

Если C_n (соответственно C^n) – однородная компонента нижней (соответственно верхней) степени n градуированного A-модуля C, то задание d эквивалентно заданию последовательности гомоморфизмов

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots, \tag{1}$$

соответственно

$$\ldots \to C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \to \ldots, \tag{1'}$$

для которой $d_n \circ d_{n+1} = 0$ при всяком $n \in Z$ (соответственно $d^n \circ d^{n-1} = 0$ при всяком $n \in Z$). Злоупотребляя языком, будем также называть комплексом задание такой последовательности A-модулей и гомоморфизмов.

Отметим мнемоническое правило, согласно которому, если в диаграммах (1) и (1') двигаться в направлении стрелок, нижняя степень уменьшается, а верхняя степень увеличивается.

Всякий градуированный A-модуль будет молчаливо рассматриваться как комплекс, наделенный нулевым дифференциалом; получаемые таким образом комплексы будут называться *комплексами с нулевым дифференциалом.* В частности, всякий A-модуль M будет считаться наделенным единственной структурой A-комплекса, при которой $M_0 = M^0 = M$. Комплекс (C, d) называется *нулевым*, если C – нулевой модуль. В последующем через 0 обозначается нулевой комплекс, выбранный раз навсегда.

Присоединим к упорядоченному множеству Z два элемента, обозначаемые через $-\infty$ и $+\infty$; полученное множество обозначим через $\overline{Z}$ и наделим его отношением порядка, продолжающим порядок на Z и таким, что $-\infty < n < +\infty$ для всякого $n \in Z$; всякое подмножество в $\overline{Z}$ обладает нижней и верхней гранями.

Пусть C – комплекс; правой и левой[1]) границами C называются элементы $b_d(C)$ и $b_g(C)$ из $\overline{\mathbf{Z}}$ определяемые следующими условиями:

$$b_d(C) = \inf\{n \in \mathbf{Z},\ C_n \neq 0\}, \quad b_g(C) = \sup\{n \in \mathbf{Z},\ C_n \neq 0\}.$$

Говорят, что комплекс C *нулевой справа*, если $b_d(C) \geqslant 0$, *ограниченный справа*, если $b_d(C) \neq -\infty$, *нулевой слева*, если $b_g(C) \leqslant 0$, *ограниченный слева*, если $b_g(C) \neq +\infty$; говорят, что C *ограниченный*, если

$$b_d(C) \neq -\infty, \quad b_g(C) \neq +\infty.$$

Длиной[2]) комплекса C называют элемент $l(C)$ из $\overline{\mathbf{Z}}$, определяемый следующим образом: если C нулевой, то $l(C) = -\infty$; если C ограниченный и ненулевой, то $l(C) = b_g(C) - b_d(C)$; если C неограниченный, то $l(C) = +\infty$. * При соглашениях из TG, IV, p. 13–17, всегда $l(C) = b_g(C) - b_d(C)$. *

Например, если k последовательных компонент комплекса C отличны от нуля, а все другие нулевые, то $l(C) = k - 1$, если $k > 0$, $l(C) = -\infty$, если $k = 0$.

Говорят, что комплекс (C, d) ***свободный, проективный, плоский, инъективный,*** если каждый из модулей C_n обладает соответствующим свойством. Отметим, что комплекс (C, d) проективный или плоский, если и только если модуль C обладает этим свойством (II, p. 39, prop. 3, а также предложение 4, с. 12), но что модуль C может быть свободным, хотя комплекс (C, d) таковым не является (так как прямой миожитель свободного модуля не всегда свободен), а также что комплекс (C, d) может быть инъективным, хотя модуль C не инъективен (с. 27, упражнение 21).

Пусть (C, d) – комплекс. Положим $Z(C, d) = \mathrm{Ker}(d)$, $B(C, d) = \mathrm{Im}(d)$; это градуированные подмодули в C, называемые соответственно модулем *циклов* и модулем *границ* комплекса (C, d); однородные компоненты модулей $Z(C, d)$ и $B(C, d)$ обозначаются через $Z_n(C, d) = Z^{-n}(C, d)$, $B_n(C, d) = B^{-n}(C, d)$; имеем: $Z_n(C, d) = \mathrm{Ker}(d_n)$, $B_n(C, d) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$, $Z^n(C, d) = \mathrm{Ker}(d^n)$, $B^n(C, d) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$.

Так как $d \circ d = 0$, то $B(C) \subset Z(C)$; два цикла называются *гомологичными*, если их разность – граница; градуированный фактормодуль $H(C, d) = Z(C, d)/B(C, d)$ называется *модулем гомологии* комплекса (C, d); его элементами служат *классы гомологии*; его однородные компоненты обозначаются через $H_n(C, d) = H^{-n}(C, d)$.

Пример. Если C – комплекс с нулевым дифференциалом, то $Z(C) = C$, $B(C) = 0$ и $H(C)$ канонически отождествляется с C.

Имеют место *точные последовательности*, называемые *каноническими*:

$$(I_n) \quad 0 \to Z_n(C) \to C_n \xrightarrow{\delta_n} B_{n-1}(C) \to 0,$$

$$(II_n) \quad 0 \to B_n(C) \to Z_n \to H_n(C) \to 0,$$

$$(III_n) \quad 0 \to B_n(C) \to C_n \to C_n/B_n(C) \to 0,$$

$$(IV_n) \quad 0 \to H_n(C) \to C_n/B_n(C) \xrightarrow{\overline{\delta}_n} B_{n-1}(C) \to 0,$$

где δ_n и $\overline{\delta}_n$ получены из d_n. Путем комбинации (IV_n) и (II_{n-1}) получаем точную последовательность

$$(V_n) \quad 0 \to H_n(C) \to C_n/B_n(C) \to Z_{n-1}(C) \to H_{n-1}(C) \to 0,$$

которая записывается также, с заменой n на $-n$, в виде:

$$(V^n) \quad 0 \to H^n(C) \to C^n/B^n(C) \to Z^{n+1}(C) \to H^{n+1}(C) \to 0.$$

Определение 2. Пусть (C, d) и (C', d') – два комплекса. *Морфизмом*[3]) комплекса (C, d) в (C', d') называется градуированный A-гомоморфизм степени 0 гради-

---

[1]) Слова ***правый*** и ***левый*** употребляются относительно описания комплекса C с помощью диаграмм (1) и (1′).

[2]) Не следует смешивать понятие длины комплекса (C, d) с понятием длины модуля C (II, p. 21; Алгебра, I, с. 110).

[3]) Или *морфизмом степени* 0 (ср. с. 88).

ированного модуля C в C′, для которого

$$d' \circ u = u \circ d.$$

Для всякого n имеем, следовательно: $d'_n \circ u_n = u_{n-1} \circ d_n$ и $d'^n \circ u^n = u^{n+1} \circ d^n$ Имеем:

$$u(Z(C)) \subset Z(C'), \quad u(B(C)) \subset B(C'),$$

и через $Z(u)\colon Z(C) \to Z(C')$, $B(u)\colon B(C) \to B(C')$, $H(u)\colon H(C) \to H(C')$ обозначаются гомоморфизмы, получаемые из этих включений; однородные компоненты этих морфизмов обозначаются через $Z_n(u), Z^n(u), \ldots$

Если v — другой морфизм комплекса (C, d) в (C', d'), то $u + v$ — морфизм (C, d) в (C', d') и

$$Z(u+v) = Z(u) + Z(v), \quad B(u+v) = B(u) + B(v),$$

$$H(u+v) = H(u) + H(v).$$

Кроме того, если A — алгебра над коммутативным кольцом k и если $\lambda \in k$, то λu — морфизм (C, d) в (C', d) и

$$Z(\lambda u) = \lambda Z(u), \quad B(\lambda u) = \lambda B(u), \quad H(\lambda u) = \lambda H(u).$$

Если $u'\colon (C', d') \to (C'', d'')$ — другой морфизм комплексов, то $u' \circ u$ — морфизм (C, d) в (C'', d'') и

$$Z(u' \circ u) = Z(u') \circ Z(u), \quad B(u' \circ u) = B(u') \circ B(u),$$

$$H(u' \circ u) = H(u') \circ H(u).$$

Ясно, что биективный морфизм комплексов является изоморфизмом.

Определение 3. Пусть (C, d) и (C', d') — два комплекса. *Гомологизмом* (или *квазиизоморфизмом*) комплекса (C, d) в (C', d') называется морфизм $u\colon (C, d) \to (C', d')$, для которого гомоморфизм $H(u)$ биективен.

Всякий изоморфизм является гомологизмом, всякая композиция гомологизмов — гомологизм.

Говорят, что (C, d) — комплекс с *нулевой гомологией*, если $H(C) = 0$, т.е. если однозначно определенный морфизм комплексов $0 \to C$ (соответственно $C \to 0$) является гомологизмом. Говорят, что комплекс (C, d) *ациклиен в нижней степени* n (соответственно в верхней степени n), если $H_n(C) = 0$ (соответственно $H^n(C) = 0$).

Пусть (C, d) — комплекс и $p \in \mathbf{Z}$; *p-м сдвигом* комплекса (C, d) называется комплекс $(C(p), d(p))$, получаемый следующим образом: $C(p)$ — A-модуль, получаемый сдвигом на p номеров градуировки C (II, p. 163, exemple 3), так что

$$C(p)_n = C_{n+p}, \quad C(p)^n = C^{n-p};$$

в частности, $C(p)_0 = C_p$; следует отметить также, что C представляет собой прямую сумму своих градуированных подмодулей $C_p(-p)$, $p \in \mathbf{Z}$ (соответственно $C^p(p)$, $p \in \mathbf{Z}$). Положим $d(p) = (-1)^p d$. Имеем: $Z(C(p)) = Z(C)(p)$, $B(C(p)) = B(C)(p)$ и и $H(C(p)) = H(C)(p)$.

Например, d представляет собой морфизм комплексов C в $C(-1)$ и гомоморфизм

$$H(d)\colon H(C) \to H(C)(-1)$$

нулевой.

Для всякого морфизма комплексов $u\colon (C, d) \to (C', d')$ и всякого $p \in \mathbf{Z}$ u является также морфизмом $(C(p), d(p))$ в $(C'(p), d'(p))$; его обозначают иногда через $u(p)$, причем

$$u(p)_n = u_{n+p}, \quad u(p)^n = u^{n-p}.$$

2. Операции над комплексами

На множестве $A \times A$ два закона

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b)(a', b') = (aa', ab' + ba')$$

определяют структуру кольца, обозначаемого через $A(\epsilon)$, с единицей $1 = (1, 0)$; вло-

жение $a \mapsto (a, 0) = a1$ позволяет отождествить A с подкольцом в $A(\epsilon)$; модуль $A(\epsilon)$ свободен с базисом $\{1, \epsilon\}$, где $\epsilon = (0, 1)$; имеем: $\epsilon^2 = 0$ и ϵ – центральный элемент в $A(\epsilon)$.

Когда кольцо A коммутативно, $A(\epsilon)$ называется *алгеброй двойных чисел* над A (III, p. 15).

Наделим $A(\epsilon)$ структурой градуированного кольца (II, p. 164), для которой $A(\epsilon)_0 = A \cdot 1$, $A(\epsilon)_{-1} = A \cdot \epsilon$ и $A(\epsilon)_n = 0$ при $n \neq 0, -1$. Ясно, что задание структуры A-комплекса на множестве C равносильно заданию на C структуры градуированного $A(\epsilon)$-модуля, дифференциал d при этом соответствует гомотетии ϵ_C; кроме того, морфизмы комплексов соответствуют градуированным гомоморфизмам степени 0 градуированных $A(\epsilon)$-модулей.

Таким образом, *роды структуры* градуированных $A(\epsilon)$-модулей и A-комплексов *эквивалентны* (E, IV, p. 9–10; Теория множеств, IV, с. 252–254). Мы используем этот факт для перенесения в теорию комплексов обычных понятий теории градуированных модулей.

Понятию *градуированного под-$A(\epsilon)$-модуля* соответствует понятие *подкомплекса*: таким образом, подкомплекс комплекса (C, d) – это такой градуированный подмодуль C' в C, что $d_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$ для всякого $n \in \mathbf{Z}$; если обозначить через d' градуированный A-гомоморфизм C' в C', получаемый из d, то (C', d') представляет собой структуру комплекса, о которой говорят, что она *индуцирована* структурой (C, d). Без явного указания противного всякий подкомплекс будет считаться наделенным индуцированной структурой.

Мы предоставляем читателю явно сформулировать также понятия факторкомплекса, точной последовательности комплексов, ядра, коядра, образа морфизма комплексов, следуя приведенному ниже словарю:

градуированный фактор-$A(\epsilon)$-модуль = *факторкомплекс,*

ядро, коядро, образ градуированного $A(\epsilon)$-гомоморфизма степени 0 } = *ядро, коядро, образ* морфизма комплексов,

точная последовательность градуированных $A(\epsilon)$-модулей и градуированных гомоморфизмов степени 0 } = *точная последовательность комплексов.*

Например, канонические точные последовательности из п. 1 дают точные последовательности комплексов, называемые *каноническими*:

(I) $0 \to Z(C) \to C \xrightarrow{\delta} B(C)(-1) \to 0,$

(II) $0 \to B(C) \to Z(C) \to H(C) \to 0,$

(III) $0 \to B(C) \to C \to C/B(C) \to 0,$

(IV) $0 \to H(C) \to C/B(C) \xrightarrow{\delta} B(C)(-1) \to 0,$

(V) $0 \to H(C) \to C/B(C) \to Z(C)(-1) \to H(C)(-1) \to 0.$

Точно так же определяются понятия *прямой суммы комплексов, индуктивной системы комплексов, индуктивного предела индуктивной системы комплексов.*

Пусть $(C_\iota, d_\iota)_{\iota \in I}$ – семейство комплексов. *Произведением* этого семейства, обозначаемым через $\prod_{\iota \in I} (C_\iota, d_\iota)$, называется комплекс (C, d), получаемый следующим образом:

а) для всякого $n \in \mathbf{Z}$ C_n представляет собой произведение $\prod_{\iota \in I} (C_\iota)_n$ однородных компонент $(C_\iota)_n$ данных комплексов,

б) для всякого $n \in \mathbf{Z}$ d_n: $C_n \to C_{n-1}$ представляет собой A-гомоморфизм с компонентами $(d_\iota)_n$.

Когда I конечно, комплекс $\prod_{\iota \in I} (C_\iota, d_\iota)$ равен комплексу $\bigoplus_{\iota \in I} (C_\iota, d_\iota)$. Следует предостеречь читателя, что, вообще говоря, модуль, на котором определен комплекс $\prod_{\iota \in I} (C_\iota, d_\iota)$, не совпадает с произведением модулей $\prod_{\iota \in I} C_\iota$.

Рассмотрим семейство (соответственно направленную индуктивную систему) комплексов $(C_i)_{i\in I}$. Пусть C – прямая сумма (соответственно индуктивный предел) семейства (C_i), и пусть $\alpha_i\colon C_i \to C$ – канонические гомоморфизмы. Тогда гомоморфизмы $H(\alpha_i)\colon H(C_i) \longrightarrow H(C)$ определяют градуированный гомоморфизм степени 0, называемый *каноническим*, прямой суммы $\bigoplus_{i\in I} H(C_i)$ (соответственно индуктивного предела $\varinjlim_{i\in I} H(C_i)$) в $H(C)$. Кроме того, канонические проекции $\prod_{i\in I} C_i \to C_i$ определяют градуированный гомоморфизм степени 0, называемый *каноническим*, модуля гомологии $H(\prod_{i\in I} C_i)$ в $\prod_{i\in I} (H(C_i))$.

Предложение 1. *Для всякого семейства комплексов* $(C_i)_{i\in I}$ *канонические гомоморфизмы*

$$\bigoplus_{i\in I} H(C_i) \to H\Big(\bigoplus_{i\in I} C_i\Big), \qquad H\Big(\prod_{i\in I} C_i\Big) \to \prod_{i\in I} H(C_i) \tag{2}$$

биективны.

Для всякой направленной индуктивной системы $(C_i)_{i\in I}$ *канонический гомоморфизм*

$$\varinjlim_{i\in I} H(C_i) \to H\Big(\varinjlim_{i\in I} C_i\Big) \tag{3}$$

биективен.

Это немедленно следует из II, p. 14, cor. 1 à la prop. 7, p. 11, cor. à la prop. 5 и p. 91, prop. 3.

3. Связывающий гомоморфизм и гомологическая точная последовательность

В этом пункте рассматривается *точная последовательность комплексов*

$$0 \to C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \to 0;$$

дифференциалы в комплексах C, C′ и C″ обозначаются одной и той же буквой d.

Пусть Γ – множество тех $x\in C$, для которых $dx\in \operatorname{Im}(u)$; при $x\in\Gamma$ имеем:

$$d(u^{-1}(dx)) = u^{-1}(dd(x)) = 0,$$

следовательно, $u^{-1}(dx)\in Z(C')$; имеем также: $dv(x) = vd(x)\in \operatorname{Im}(v\circ u) = 0$, следовательно, $v(x)\in Z(C'')$; рассмотрим теперь линейное отображение $\varphi\colon \Gamma \to H(C'')\times H(C')$, которое отображает всякий элемент $x\in\Gamma$ в класс элемента $(v(x), u^{-1}(dx))$.

Лемма 1. *Образ* $\varphi(\Gamma)$ *множества* Γ *в* $H(C'')\times H(C')$ *представляет собой график некоторого градуированного* A*-гомоморфизма степени* -1 *модуля гомологии* $H(C'')$ *в* $H(C')$.

а) Если $x\in\Gamma$ и если $v(x)\in B(C'')$, то $u^{-1}(dx)\in B(C')$: действительно, существует элемент $z''\in C''$, для которого $v(x) = dz''$, далее, существует $z\in C$, для которого $z'' = v(z)$, следовательно, $v(x) = v(dz)$, наконец, существует $t'\in C'$, для которого $x - dz = u(t')$, а это дает, что $dx = u(dt')$, следовательно, $u^{-1}(dx) = dt'\in B(C')$.

б) Всякий элемент из $Z(C'')$ является образом при отображении v некоторого элемента x из C, для которого $v(dx) = 0$, т.е. $dx\in \operatorname{Im} u$, т.е. $x\in\Gamma$.

в) Из а) и б) следует, что $\varphi(\Gamma)$ представляет собой график функции; поскольку отображение φ биоднородное бистепени $(0, -1)$, доказательство леммы закончено.

Определяемый таким образом градуированный гомоморфизм степени -1 модуля $H(C'')$ в $H(C')$ называется *связывающим гомоморфизмом относительно точной последовательности* (u, v); его обозначают через $\partial(u, v)$, или $\partial_{u,v}$, или просто ∂. Его однородные компоненты обозначаются через

$$\partial_n(u, v)\colon H_n(C'') \to H_{n-1}(C') \quad\text{и}\quad \partial^n(u, v)\colon H^n(C'') \to H^{n+1}(C').$$

По определению, для построения образа класса $\alpha\in H_n(C'')$ при ∂ надо выбрать цикл $z''\in Z_n(C'')$ из класса α, затем элемент x из C, для которого $v(x) = z''$; тогда dx имеет вид $u(t')$, $t'\in C'_{n-1}$, и $\partial(\alpha)$ есть класс гомологии цикла t'.

В терминах *соответствий* $\partial_n(u, v)$ получается, таким образом, исходя из соответствия $u_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ v_n^{-1}$ между C_n'' и C_{n-1}' посредством перехода к подмножествам $Z_n(C'')$ и $Z_{n-1}(C')$, а затем и их факторможествам $H_n(C'')$ и $H_{n-1}(C')$. Это показывает, в частности, что если заменить C, C', C'', u, v на $C(p)$, $C'(p)$, $C''(p)$, $u(p)$, $v(p)$, то

$$\partial(u(p), v(p)) = (-1)^p \partial(u, v); \tag{4}$$

кроме того, если λ и μ – два обратимых элемента из центра кольца A, то

$$\partial(\lambda u, \mu v) = \lambda^{-1}\mu^{-1}\partial(u, v). \tag{5}$$

Можно также установить связь гомоморфизма $\partial(u, v)$ со *змеевидной диаграммой* (с. 9). Согласно предложению 2, с. 9, последовательности

$$0 \to Z_n(C') \xrightarrow{Z_n(u)} Z_n(C) \xrightarrow{Z_n(v)} Z_n(C'')$$

и

$$C_n'/B_n(C') \xrightarrow{\bar{u}_n} C_n/B_n(C) \xrightarrow{\bar{v}_n} C_n''/B_n(C'') \to 0,$$

где $\bar{u}_n$ и $\bar{v}_n$ получаются из u и v, точные. Используя канонические точные последовательности (V_n), получаем *коммутативную диаграмму* с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_n(C') & \xrightarrow{H_n(u)} & H_n(C) & \xrightarrow{H_n(v)} & H_n(C'') & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_n'/B_n(C') & \xrightarrow{\bar{u}_n} & C_n/B_n(C) & \xrightarrow{\bar{v}_n} & C_n''/B_n(C'') & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to Z_{n-1}(C') & \xrightarrow{Z_{n-1}(u)} & Z_{n-1}(C) & \xrightarrow{Z_{n-1}(v)} & Z_{n-1}(C'') & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_{n-1}(C') & \xrightarrow{H_{n-1}(u)} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{H_{n-1}(v)} & H_{n-1}(C'') & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Гомоморфизм $H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$, ассоциированный с этой диаграммой (с. 9, предложение 2 (iii)), совпадает по построению с $\partial_n(u, v)$. Это влечет, кроме того, что последовательность гомоморфизмов $(H_n(u), H_n(v), \partial_n(u, v), H_{n-1}(u), H_{n-1}(v))$ точная; следовательно, имеет место

Теорема 1. *Неограниченная в обе стороны последовательность гомоморфизмов A-модулей*

$$\cdots \to H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial_{n+1}(u,v)} H_n(C') \xrightarrow{H_n(u)} H_n(C) \xrightarrow{H_n(v)} H_n(C'')$$

$$\xrightarrow{\partial_n(u,v)} H_{n-1}(C') \xrightarrow{H_{n-1}(u)} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(v)} H_{n-1}(C'') \xrightarrow{\partial_{n-1}(u,v)} H_{n-2}(C') \to \cdots$$

точная.

Эта последовательность называется *гомологической точной последовательностью*, ассоциированной с точной последовательностью (u, v); ее записывают иногда в виде *точного треугольника A-модулей*

$$\begin{array}{ccc}
 & H(C) & \\
{\scriptstyle H(u)}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle H(v)} \\
H(C') & \xleftarrow[\partial(u,v)]{} & H(C'').
\end{array}$$

Следствие 1. *Если два из трех комплексов* C, C', C'' *имеют нулевую гомологию, то третий таков же. Для того чтобы морфизм* u *(соответственно* v*) был гомологизмом, необходимо и достаточно, чтобы комплекс* C'' *(соответственно* C'*) имел нулевую гомологию. Для того чтобы гомоморфизм* $\partial(u, v)$ *был биективным, необходимо и достаточно, чтобы комплекс* C *имел нулевую гомологию.*

Следствие 2. *Пусть* u *– морфизм комплексов. Если комплексы* $\operatorname{Ker} u$ *и* $\operatorname{Coker} u$ *имеют нулевую гомологию, то* u *– гомологизм.*.

Действительно, пусть $u\colon E \to E'$ – морфизм комплексов. Если $\operatorname{Ker} u$ (соответственно $\operatorname{Coker} u$) имеет нулевую гомологию, то канонический морфизм $E \to \operatorname{Im} u$ (соответственно $\operatorname{Im} u \to E'$) является гомологизмом согласно следствию 1.

Предложение 2. *Рассмотрим коммутативную диаграмму комплексов с точными строками*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{v} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1' & \xrightarrow{u_1} & C_1 & \xrightarrow{v_1} & C_1'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Тогда $\mathrm{H}(f') \circ \partial(u, v) = \partial(u_1, v_1) \circ \mathrm{H}(f'')$.

Пусть $\alpha'' \in \mathrm{H}(C'')$; пусть z'' – цикл из класса α'' и x – элемент из C, для которого $v(x) = z''$; имеем:

$$(\partial_{u_1, v_1} \circ \mathrm{H}(f''))(\alpha'') = \partial_{u_1, v_1}\,\overline{(f''(z''))} = \overline{u_1^{-1}\,(df(x))} =$$

$$= \overline{f'(u^{-1}(dx))} = \mathrm{H}(f')\,\overline{(u^{-1}(dx))} = (\mathrm{H}(f') \circ \partial_{u, v})(\alpha'').$$

Пример. Пусть C – комплекс. Рассмотрим каноническую точную последовательность

$$\text{(I)} \qquad 0 \to Z(C) \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\delta} B(C)(-1) \to 0,$$

и пусть $i\colon B(C) \to Z(C)$ – каноническое вложение. Тогда связывающий гомоморфизм $\partial(j, \delta)\colon \mathrm{H}(B(C))(-1) \to \mathrm{H}(Z(C))(-1)$ отождествляется с гомоморфизмом $\mathrm{H}(i)(-1)$, как немедленно проверяется. Так как $\mathrm{H}(\delta) = 0$, то гомологическая точная последовательность, ассоциированная с (I), распадается на короткие точные последовательности

$$(\mathrm{II}_n) \qquad 0 \to B_n(C) \xrightarrow{i} Z_n(C) \xrightarrow{\mathrm{H}(j)} \mathrm{H}_n(C) \to 0.$$

* *Приложения:*

1. *Сингулярная гомология.*

Пусть A – кольцо. Для всякого топологического пространства X следующим образом определяется *сингулярный комплекс* $C(X, A)$ этого пространства с коэффициентами в A:

В $R^{(N)}$ обозначим через (e_n) канонический базис; каноническим n-мерным симплексом называется выпуклая оболочка Δ_n множества $\{e_0, \ldots, e_n\}$. Для $i \in \{0, \ldots, n\}$ определим аффинное отображение $\iota_i\colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n$, полагая $\iota_i(e_k) = e_k$ при $k < i$ и $\iota_i(e_k) = e_{k+1}$ при $k \geqslant i$. Обозначим через $C_n(X, A)$ A-модуль $A^{(\Sigma_n(X))}$, где $\Sigma_n(X)$ – множество непрерывных отображений Δ_n в X; при $n < 0$ положим $C_n = 0$. Для $i \in \{0, \ldots, n\}$ определим линейное отображение $\partial_{n,i}\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, полагая $\partial_{n,i}(e_s) = e_s \circ \iota_i$ для $s \in \Sigma_n(X)$, и положим $d_n = \Sigma(-1)^i \partial_{n,i}$. Проверяется, что

$$\ldots \to C_n(X, A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X, A) \to \ldots$$

– комплекс. Его гомология называется *сингулярной гомологией* пространства X с коэффициентами в A и обозначается через $\mathrm{H}(X, A)$ или просто $\mathrm{H}(X)$.

Если Y – подпространство в X, то через $C(X, Y, A)$ обозначим факторкомплекс $C(X, A)/C(Y, A)$ и через $\mathrm{H}(X, Y, A)$ – его гомологию. Из теоремы 1 следует, что имеет место точная последовательность

$$\ldots \to \mathrm{H}_n(Y, A) \to \mathrm{H}_n(X, A) \to \mathrm{H}_n(X, Y, A) \to \mathrm{H}_{n-1}(Y, A) \to \mathrm{H}_{n-1}(X, A) \to \ldots$$

2. *Конечные клеточные комплексы.*

Пусть X – отделимое топологическое пространство. *Конечное клеточное разбиение* пространства X задается возрастающей последовательностью $(X_n)_{n \in Z}$ замкнутых подпространств в X, удовлетворяющей следующим условиям:

(i) $X_n = \phi$ при $n < 0$;

(ii) существует N, для которого $X_N = X$ (следовательно, $X_n = X$ при всех $n > N$);

(iii) для всякого n пространство $X_n - X_{n-1}$ имеет только конечное число связных компонент, называемых клетками размерности n;

(iv) для всякого n и всякой связной компоненты C пространства $X_n - X_{n-1}$ существует гомеоморфизм открытого евклидова шара $\overset{\circ}{B}_n$ размерности n (TG, VI, p. 10) на C, который продолжается до непрерывного отображения замкнутого шара в X.

Можно показать, что из этих условий следует, что $H_n(X_n, X_{n-1}, A)$ представляет собой свободный A-модуль Γ_n ранга, равного числу клеток размерности n, и что $H_i(X_n, X_{n-1}, A) = 0$ при $i \neq n$. Имеем: $C(X_n, X_{n-1}, A) = C(X_n, X_{n-2}, A)/C(X_{n-1}, X_{n-2}, A)$, откуда получается точная последовательность

$$H_n(X_n, X_{n-2}) \to H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \to H_{n-1}(X_n, X_{n-2}),$$

включающая связывающий гомоморфизм d_n: $\Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$. Имеем: $d_n \circ d_{n+1} = 0$; это позволяет определить комплекс Γ: $\ldots \to \Gamma_n \xrightarrow{d_n} \Gamma_{n-1} \to \ldots$

Точная последовательность

$$H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) \to H_n(X_{p-1}) \to H_n(X_p) \to H_n(X_p, X_{p-1}) \to H_{n-1}(X_{p-1})$$

показывает индукцией по p, что $H_n(X_p) = 0$ при $p < n$, что $H_n(X_n) = \operatorname{Ker}(d_n: \Gamma_n \to \Gamma_{n-1})$ и что $H_n(X_p) = H_n(\Gamma)$ при $p > n$. В частности, $H_n(X)$ отождествляется с $H_n(\Gamma)$.

Пример. Рассмотрим произведение сфер $S_2 \times S_2$ и комплексное проективное пространство $P_2(C)$.

Пусть $b \in S_2$, определим клеточное разбиение (Y_n) пространства $Y = S_2 \times S_2$, полагая

$$Y_0 = Y_1 = \{(b, b)\}, \quad Y_2 = Y_3 = (\{b\} \times S_2) \cup (S_2 \times \{b\}), \quad Y_4 = S_2 \times S_2;$$

это разбиение включает одну клетку размерности 0, две – размерности 2 и одну – размерности 4. Дифференциалы ассоциированного комплекса по необходимости нулевые, следовательно, модули $H_0(Y)$, $H_2(Y)$ и $H_4(Y)$ свободные ранга 1, 2 и 1 соответственно и $H_n(Y) = 0$ при $n \notin \{0, 2, 4\}$.

Клеточное разбиение (Z_n) пространства $P_2(C)$ получим, полагая

$$Z_0 = Z_1 = \{c\}, \quad Z_2 = Z_3 = P_1(C), \quad Z_4 = P_2(C),$$

где пространство $P_1(C)$ вложено в $P_2(C)$ (TG, VIII, p. 20), а c – некоторая точка из $P_1(C)$; это разбиение включает по одной клетке размерности 0, 2 и 4. Здесь снова дифференциалы комплекса по необходимости нулевые, откуда следует, что модуль $H_n(P_2(C))$ изоморфен A при $n \in \{0, 2, 4\}$ и 0 в противном случае.

Так как модули гомологии степени 2 двух рассмотренных пространств свободные ранга 2 и 1 соответственно, эти пространства не гомеоморфны. *

4. Гомотопии

Определение 4. *Пусть* (C, d) *и* (C', d') – два комплекса, f и g – два морфизма C в C'. *Гомотопией,* связывающей f с g, называется всякий градуированный A-гомоморфизм степени 1 из C в C', для которого $g - f = d' \circ s + s \circ d$.

Говорят, что морфизмы f и g *гомотопны,* если существует гомотопия, связывающая f с g.

Если h – третий морфизм C в C' и если s (соответственно t) – гомотопия, связывающая f с g (соответственно g с h), то $s + t$ – гомотопия, связывающая f с h; следовательно, отношение "f и g – два гомотопных морфизма C в C'" есть отношение эквивалентности, классы которого называются *гомотопическими классами морфизмов* C *в* C'.

* Если даны два топологических пространства X и Y и непрерывное отображение f: $X \to Y$, то определяется линейное отображение f_* сингулярного комплекса (см. п. 3) $C(X, A)$ в $C(Y, A)$, при котором $f_*(e_s) = e_{f \circ s}$ для $s \in \Sigma_n(X)$. Это отображение представляет собой морфизм комплексов.

Два непрерывных отображения f и g пространства X в Y называются топологически *гомотопными*, если существует непрерывное отображение h пространства $[0, 1] \times X$ в Y, для которого $h(0, x) = f(x)$ и $h(1, x) = g(x)$ при всяком $x \in X$. Показывается, что если f и g топологически гомотопны то морфизмы f_* и g_* гомотопны в смысле данного выше определения 4. Именно этот факт объясняет происхождение терминологии, используемой в алгебре. *

Предложение 3. *Если* f *и* g *– два гомотопных морфизма* C *в* C', *то* $H(f) = H(g)$.

Пусть s – гомотопия, связывающая f с g. Имеем

$$(g - f)(Z(C)) = (d' \circ s + s \circ d)(Z(C)) = (d' \circ s)(Z(C)) \subset B(C'),$$

следовательно, $H(g - f) = 0$ и $H(g) = H(f)$.

Следствие. *Морфизм, гомотопный гомологизму, является гомологизмом.*

Предложение 4. *Пусть* C, C', D, D' *– четыре комплекса,* $f\colon C \to C', g\colon C \to C', u\colon D \to C, v\colon C' \to D'$ *– четыре морфизма. Если* s *– гомотопия, связывающая* f *с* g, *то* $v \circ s \circ u$ *– гомотопия, связывающая* $v \circ f \circ u$ *и* $v \circ g \circ u$. *Если* f *и* g *гомотопны, то* $v \circ f \circ u$ *и* $v \circ g \circ u$ *также гомотопны.*

Это очевидно.

Следствие. *Пусть* C, C', C'' *– три комплекса,* f *и* g *– два морфизма* C *в* C', f_1 *и* g_1 *– два морфизма* C' *в* C''. *Если* s *и* s_1 *– гомотопии, связывающие* f *с* g *и* f_1 *с* g_1 *соответственно, то* $s_1 \circ f + g_1 \circ s$ *представляет собой гомотопию, связывающую* $f_1 \circ f$ *с* $g_1 \circ g$. *Если* f *и* f_1 *гомотопны* g *и* g_1 *соответственно, то морфизм* $f_1 \circ f$ *гомотопен* $g_1 \circ g$.

Действительно, $s_1 \circ f$ связывает $f_1 \circ f$ с $g_1 \circ f$, а $g_1 \circ s$ связывает $g_1 \circ f$ с $g_1 \circ g$.

Определение 5. Морфизм комплексов $f\colon C \to C'$ называется *гомотопизмом*, если существует морфизм $f'\colon C' \to C$, для которого $f' \circ f$ и $f \circ f'$ гомотопны 1_C и $1_{C'}$ соответственно.

Ясно, что f' тогда тоже гомотопизм; говорят также, что f' *– обратный к* f *морфизм с точностью до гомотопии.* Если f' и f_1' – любые два обратных к f с точностью до гомотопии, то f' и f_1' гомотопны (действительно, согласно предыдущему следствию, морфизм $f_1' = f_1' \circ 1_{C'}$ гомотопен $f_1' \circ f \circ f'$ и, следовательно, гомотопен $1_C \circ f' = f'$).

Предложение 5. *Всякий гомотопизм является гомологизмом*; *композиция гомотопизмов – гомотопизм. Морфизм, гомотопный гомотопизму, – гомотопизм.*

Пусть $f\colon C \to C'$ и $f_1\colon C' \to C''$ – гомотопизмы комплексов, $f'\colon C' \to C$ и $f_1'\colon C'' \to C'$ – морфизмы, обратные им с точностью до гомотопии. Имеем:

$$H(f') \circ H(f) = H(f' \circ f) = H(1_C) = 1_{H(C)}$$

(предложение 3) и точно так же $H(f) \circ H(f') = 1_{H(C')}$; следовательно, отображение $H(f)$ биективно и f – гомологизм. С другой стороны, морфизм $(f' \circ f_1') \circ (f_1 \circ f)$ гомотопен $f' \circ 1_{C'} \circ f$ (предложение 4), следовательно, гомотопен 1_C; точно так же, морфизм $(f_1 \circ f) \circ (f' \circ f_1')$ гомотопен $1_{C''}$ и $f_1 \circ f$ – гомотопизм. Наконец, если $g\colon C \to C'$ – морфизм, гомотопный f, то морфизм $f' \circ g$ гомотопен $f' \circ f$, следовательно, гомотопен 1_C; точно так же морфизм $g \circ f'$ гомотопен $f \circ f'$, следовательно, гомотопен $1_{C'}$, и g – гомотопизм.

Следствие. *Пусть* C, C', D, D' *– четыре комплекса,* $f\colon C \to C'$ *– морфизм,* $u\colon D \to C$ и $v\colon C' \to D'$ *– гомотопизмы. Для того чтобы морфизм* $v \circ f \circ u$ *был гомотопизмом* (соответственно *гомологизмом*), *необходимо и достаточно, чтобы* f *обладал соответствующим свойством.*

Если f – гомотопизм (соответственно гомологизм), то $v \circ f \circ u$ – композиция гомотопизмов (соответственно гомологизмов), следовательно, обладает тем же свойством. Обратно, пусть $\bar{u}$ и $\bar{v}$ – морфизмы, обратные u и v с точностью до гомотопии; тогда морфизм $\bar{v} \circ (v \circ f \circ u) \circ \bar{u}$ гомотопен f согласно предложению 4; отсюда следует требуемое заключение, согласно предложению 5 и следствию из предложения 3.

Говорят, что комплекс C *гомотопен нулю*, если морфизм 1_C гомотопен нулевому отображению, т.е. если существует градуированный эндоморфизм s степени 1 модуля C, для которого $1_C = s \circ d + d \circ s$. Это равносильно также тому, что однозначно определенный морфизм $0 \to C$ (соответственно $C \to 0$) является гомотопизмом. Комплекс, гомотопный нулю, имеет нулевую гомологию.

Пример. Пусть $u\colon M \to N$ и $v\colon N \to P$ – гомоморфизмы A-модулей, для которых $v \circ u = 0$; пусть C – комплекс, в котором $C_2 = M, C_1 = N, C_0 = P, C_i = 0$ при $i \neq 0, 1, 2$, $d_2 = u, d_1 = v, d_i = 0$ при $i \neq 1, 2$. Тогда *комплекс* C *имеет нулевую гомологию, если и только если последовательность* $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$ *точная. Он гомотопен нулю, если и только если эта последовательность расщепляема.* Действительно, тот факт, что комплекс C гомотопен нулю, означает, что существуют A-гомоморфизмы $s\colon P \to N$, и $t\colon N \to M$, для которых $v \circ s = 1_P$, $s \circ v + u \circ t = 1_N$, $t \circ u = 1_M$; это влечет, что последо-

вательность расщепляется; обратно, если s – A-линейное сечение гомоморфизма v, то определим t из условия $u \circ t = 1_N - s \circ v$, что возможно, так как $v \circ (1_N - s \circ v) = v - v \circ s \circ v = 0$.

5. Расщепляемые комплексы

Предложение 6. *Пусть* (C, d) – *комплекс. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует гомотопизм* (C, d) *на* $(H(C), 0)$;

(ii) *существует градуированный степени* 1 A-*эндоморфизм* s *модуля* C, *для которого* $d = d \circ s \circ d$;

(iii) $B(C)$ *и* $Z(C)$ – *прямые множители модуля* C;

(iv) (C, d) – *прямая сумма подкомплексов, которые либо имеют длину* 0, *либо длину* 1 *и нулевую гомологию.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\varphi: C \to H(C)$ – гомотопизм, тогда существуют морфизм комплексов $\psi: H(C) \to C$ и градуированный степени 1 эндоморфизм s модуля C, для которых $\psi \circ \varphi = 1_C - s \circ d - d \circ s$. Имеем: $d \circ \psi = \psi \circ 0 = 0$, следовательно,

$$0 = d \circ \psi \circ \varphi = d - d \circ s \circ d - d \circ d \circ s = d - d \circ s \circ d,$$

откуда следует (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть s – эндоморфизм, фигурирующий в условии (ii). Тогда $d \circ (1_C - s \circ d) = 0$, следовательно, $1_C - s \circ d$ – проектор C на $Z(C)$ и $(d \circ s) \circ d = d$, следовательно, $d \circ s$ – проектор C на $B(C)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Для каждого $n \in \mathbf{Z}$ положим $Z_n = Z_n(C)$, $B_n = B_n(C)$ и выберем подмодули K_n и B'_n в C_n, для которых $C_n = B'_n \oplus Z_n$, $Z_n = K_n \oplus B_n$. Тогда

$$E_{(n)} = K_n(-n) \quad \text{и} \quad F_{(n)} = B'_n(-n) \oplus B_{n-1}(1-n)$$

– подкомплексы в (C, d); имеем: $(C, d) = \bigoplus_{n \in Z} (E_{(n)} \oplus F_{(n)})$, каждый комплекс $E_{(n)}$ либо нулевой, либо длины 0, каждый комплекс $F_{(n)}$ либо нулевой, либо длины 1 с нулевой гомологией, откуда следует (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Достаточно заметить, что условие (i) удовлетворяется, когда комплекс C длины нуль или с нулевой гомологией и длины 1.

Определение 6. Комплекс C называется *расщепляемым*, если он удовлетворяет эквивалентным условиям предложения 6.

Эндоморфизм s для C, удовлетворяющий условию (ii) предложения 6, называется *расщеплением* C.

Примеры 1. Комплекс с нулевым дифференциалом расщепляется.

2. Комплексы, гомотопные нулю, представляют собой расщепляемые комплексы с нулевой гомологией, т.е. комплексы C, для которых $H(C) = 0$ и $Z(C)$ – прямой множитель в C.

3. Пусть $f: M \to N$ – гомоморфизм A-модулей и C – комплекс, для которого $C_1 = M$, $C_0 = N$, $C_i = 0$ при $i = 0, 1$, $d_1 = f$, $d_i = 0$ при $i \neq 1$. Тогда C расщепляем, если и только если $\operatorname{Ker} f$ – прямой множитель в M и $\operatorname{Im} f$ – прямой множитель в N.

4. Комплекс C расщепляем, когда модули $B(C)$ и $H(C)$ проективны (соответственно когда $B_n(C)$ и $H_n(C)$ инъективны для каждого n). Действительно, согласно точным последовательностям $(I_n) - (IV_n)$ из п. 1, тогда $Z(C)$ – прямой множитель в C и $B(C)$ – прямой множитель в $Z(C)$ (соответственно $B(C)$ – прямой множитель в C и $Z(C)/B(C)$ – прямой множитель в $C/B(C)$).

5. В частности, если A – кольцо главных идеалов, свободный комплекс C расщепляем, если и только если комплекс $H(C)$ свободный (т.е. $H_n(C)$ – свободный модуль для всякого $n \in \mathbf{Z}$).

Замечание. а) Предположим, что каноническая точная последовательность градуированных A-модулей

$$(II) \qquad 0 \to B(C) \to Z(C) \xrightarrow{\pi} H(C) \to 0$$

расщепляема (это имеет место, например, если модуль $H(C)$ проективен или модуль $B_n(C)$ инъективен для каждого n); пусть $\sigma: H(C) \to Z(C)$ – градуированное A-линейное

сечение отображения π и пусть ψ – гомоморфизм $x \mapsto \sigma(x)$ модуля $H(C)$ в C. Тогда ψ – *гомологизм комплекса* $(H(C), 0)$ *в* C, *для которого* $H(\psi) = 1_{H(C)}$.

б) Предположим, что каноническая точная последовательность градуированных A-модулей

$$\text{(IV)} \quad 0 \to H(C) \xrightarrow{i} C/B(C) \to B(C)(-1) \to 0$$

расщепляема (это имеет место, например, если модуль $B(C)$ проективен или модуль $H_n(C)$ инъективен для каждого n); пусть τ: $C/B(C) \to H(C)$ – градуированная A-линейная ретракция для вложения i и φ – гомоморфизм модуля C в $H(C)$, сопоставляющий каждому элементу из C образ при τ его класса по модулю $B(C)$. Тогда φ – гомологизм комплекса C в $(H(C), 0)$, для которого $H(\varphi) = 1_{H(C)}$.

6. Конус и цилиндр морфизма комплексов

Пусть u: $(C', d') \to (C, d)$ – морфизм комплексов. Пусть $\mathrm{Cyl}(u)$ и $\mathrm{Con}(u)$ – градуированные A-модули $\mathrm{Cyl}(u) = C' \oplus C'(-1) \oplus C$, $\mathrm{Con}(u) = C'(-1) \oplus C$; определим градуированные A-линейные отображения степени -1:

$$\bar{D}\text{: } \mathrm{Cyl}(u) \to \mathrm{Cyl}(u), \qquad \bar{D}(x', y', x) = (d'x' + y', -d'y', dx - u(y')),$$

$$D\text{: } \mathrm{Con}(u) \to \mathrm{Con}(u), \qquad D(y', x) = (-d'y', dx - u(y')).$$

(Здесь и в дальнейшем через $x, y, \ldots$ обозначаются произвольные элементы из C, через $x', y', \ldots$ – произвольные элементы из C'.)

Лемма 2. $(\mathrm{Cyl}(u), \bar{D})$ u $(\mathrm{Con}(u), D)$ – *комплексы* A-*модулей.*

Действительно, имеем:

$$\bar{D} \circ \bar{D}(x', y', x) = \bar{D}(d'x' + y', -d'y', dx - u(y')) =$$

$$= (d'(d'x' + y') - d'y', \; -d'(-d'y'), \; d(dx - u(y')) - u(-d'y')) = 0,$$

так как $d' \circ d' = 0$, $d \circ d = 0$ и $d \circ u = u \circ d'$. Точно так же $D \circ D = 0$.

Определение 7. Комплексы $\mathrm{Cyl}(u)$ и $\mathrm{Con}(u)$ называются соответственно *цилиндром* и *конусом* морфизма u.

Пример. Пусть u: $M \to N$ – гомоморфизм A-модулей; тогда единственными ненулевыми компонентами комплексов $\mathrm{Cyl}(u)$ и $\mathrm{Con}(u)$ будут

$$\mathrm{Cyl}_1(u) = M, \qquad \mathrm{Cyl}_0(u) = M \oplus N,$$

$$\mathrm{Con}_1(u) = M, \qquad \mathrm{Con}_0(u) = N,$$

при этом $\bar{D}(m) = (m, -u(m))$, $D(m) = -u(m)$ для $m \in M$; следовательно,

$$H_1(\mathrm{Con}(u)) = \mathrm{Ker}(u), \qquad H_0(\mathrm{Con}(u)) = \mathrm{Coker}(u).$$

* Пусть X и Y – два топологических пространства и f – непрерывное отображение X в Y. *Цилиндром* f называется факторпространство $\mathrm{Cyl}(f)$ топологической суммы пространств $[0, 1] \times X$ и Y по отношению эквивалентности, отождествляющему точку $(1, x)$ пространства $[0, 1] \times X$ с точкой $f(x)$ пространства Y для всякой точки $x \in X$. *Конусом* f называется факторпространство $\mathrm{Con}(f)$ топологической суммы пространства, состоящего из одной точки s, и пространства $\mathrm{Cyl}(f)$ по отношению эквивалентности, отождествляющему s с образом в $\mathrm{Cyl}(f)$ точки $(0, x)$ для всякой точки $x \in X$; образ точки s в $\mathrm{Con}(f)$ будем по-прежнему обозначать через s.

Предположим, что X и Y наделены клеточными разбиениями (X_n) и (Y_n) (см. п. 3), и предположим, что $f(X_n) \subset Y_n$ для всякого n. Мы получим клеточное разбиение (S_n) пространства $\mathrm{Cyl}(f)$ (соответственно $\mathrm{Con}(f)$), взяв в качестве S_n образ подпространства $(\{0\} \times X_n) \cup ([0, 1] \times X_{n-1}) \cup Y_n$ (соответственно $\{s\} \cup ([0, 1] \times X_{n-1}) \cup Y_n$), если $n \geqslant 0$. Обозначим через $\Gamma(X)$, $\Gamma(Y)$, $\Gamma(\mathrm{Cyl}(f))$, $\Gamma(\mathrm{Con}(f))$ комплексы, ассоциированные с этими клеточными разбиениями. Комплекс $\Gamma(s)$, ассоциированный с пространством $\{s\}$, наделенным своим единственным клеточным разбиением, сводится к модулю A и отождествляется с подкомплексом в $\Gamma(\mathrm{Con}(f))$; обозначим через $\Gamma(\mathrm{Con}(f), s)$ факторкомплекс. Отображение f определяет морфизм комплексов $\Gamma(f)$: $\Gamma(X) \to \Gamma(Y)$, и можно показать, что комплексы $\Gamma(\mathrm{Cyl}(f))$ и $\Gamma(\mathrm{Con}(f), s)$ отождествляются соответственно с $\mathrm{Cyl}(\Gamma(f))$ и $\mathrm{Con}(\Gamma(f))$.

Впрочем, и без дополнительных предположений относительно X и Y с отображением f ассоциируется морфизм комплексов f_*: $C(X, A) \to C(Y, A)$. Можно построить инъективные гомотопизмы комплекса $\mathrm{Cyl}(f_*)$ в $C(\mathrm{Cyl}(f), A)$ и комплекса $\mathrm{Con}(f_*)$ в $C(\mathrm{Con}(f), \{s\}, A)$.

Пусть $\tilde{f}$: $X \to \mathrm{Cyl}(f)$ – отображение, сопоставляющее точке x образ точки $(0, x)$, α: $Y \to \mathrm{Cyl}(f)$ – каноническое отображение и β: $\mathrm{Cyl}(f) \to Y$ – отображение, сопоставляющее точку y ее образу в $\mathrm{Cyl}(f)$ для $y \in Y$ и точку $f(x)$ образу (t, x) в $\mathrm{Cyl}(f)$ для $t \in [0,1]$ и $x \in X$. Отображение f определяет гомеоморфизм пространства X на замкнутое подпространство в $\mathrm{Cyl}(f)$, $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_Y$ и отображение $\alpha \circ \beta$ топологически гомотопно тождественному отображению пространства $\mathrm{Cyl}(f)$. Эти свойства можно сопоставить с предложением 7 ниже. ∎

Рассмотрим теперь градуированные A-линейные отображения степени 0:

$\tilde{u}$: $C' \to \mathrm{Cyl}(u)$, $\quad \tilde{u}(x') = (x', 0, 0)$,

α: $C \to \mathrm{Cyl}(u)$, $\quad \alpha(x) = (0, 0, x)$,

β: $\mathrm{Cyl}(u) \to C$, $\quad \beta(x', y', x) = u(x') + x$,

π: $C \to \mathrm{Con}(u)$, $\quad \pi(x) = (0, x)$,

$\tilde{\pi}$: $\mathrm{Cyl}(u) \to \mathrm{Con}(u)$, $\quad \tilde{\pi}(x', y', x) = (y', x)$,

δ: $\mathrm{Con}(u) \to C'(-1)$, $\quad \delta(y', x) = y'$.

Предложение 7. а) *Отображения* $\tilde{u}, \alpha, \beta, \pi, \tilde{\pi}, \delta$ *– морфизмы комплексов; имеем:* $u = \beta \circ \tilde{u}$, $\pi = \tilde{\pi} \circ \alpha$, $\beta \circ \alpha = 1_C$.

б) *Последовательности морфизмов комплексов*

$$0 \to C' \xrightarrow{\tilde{u}} \mathrm{Cyl}(u) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathrm{Con}(u) \to 0, \tag{6}$$

$$0 \to C \xrightarrow{\pi} \mathrm{Con}(u) \xrightarrow{\delta} C'(-1) \to 0 \tag{7}$$

точные.

в) *Морфизмы* α: $C \to \mathrm{Cyl}(u)$ *и* β: $\mathrm{Cyl}(u) \to C$ *представляют собой гомотопизмы, взаимно обратные с точностью до гомотопии.*

Утверждение а) эквивалентно формулам:

$\tilde{u} \circ d' = \bar{D} \circ \tilde{u}$, $\quad \alpha \circ d = \bar{D} \circ \alpha$, $\quad \beta \circ \bar{D} = d \circ \beta$, $\quad \pi \circ d = D \circ \pi$, $\quad \tilde{\pi} \circ \bar{D} = D \circ \tilde{\pi}$,

$\delta \circ D = -d' \circ \delta$, $\quad u = \beta \circ \tilde{u}$, $\quad \pi = \tilde{\pi} \circ \alpha$, $\quad \beta \circ \alpha = 1_C$,

которые проверяются непосредственными вычислениями. Утверждение б) тривиально. Докажем в); имеем, с одной стороны, $\beta \circ \alpha = 1_C$, с другой стороны, если σ: $\mathrm{Cyl}(u) \to \mathrm{Cyl}(u)$ – градуированное степени 1 A-линейное отображение, при котором $\sigma(x', y', x) = (0, x', 0)$, то немедленно проверяется, что

$$\bar{D} \circ \sigma + \sigma \circ \bar{D} + \alpha \circ \beta = 1_{\mathrm{Cyl}(u)},$$

откуда следует в).

Предложение 7 можно резюмировать посредством следующей *коммутативной* диаграммы, в которой строки точные, а вертикальные стрелки – гомотопизмы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Con}(u) & \xrightarrow{\delta} & C'(-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\tilde{u}} & \mathrm{Cyl}(u) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathrm{Con}(u) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \\
 & & C' & \xrightarrow{u} & C & & & &
\end{array}$$

Следствие. *Для всякого морфизма комплексов* u: $C' \to C$ *существуют инъективный морфизм комплексов* $\tilde{u}$: $C' \to C_1$ *и гомотопизм* β: $C_1 \to C$, *для которых* $u = \beta \circ \tilde{u}$.

Лемма 3. а) *Связывающий гомоморфизм:*

$\partial_{n+1}(\pi, \delta)$: $H_n(C') \to H_n(C)$

относительно точной последовательности (7) *равен* $-H_n(u)$.

б) *Связывающий гомоморфизм*

$\partial_n(\tilde{u}, \tilde{\pi})$: $H_n(\mathrm{Con}(u)) \to H_{n-1}(C')$

относительно точной последовательности (6) *равен* $H_n(\delta)$.

Пусть $x' \in Z_n(C')$; так как $x' = \delta(x', 0)$ и

$-D(x', 0) = (d'x', u(x')) = (0, u(x')) = \pi(u(x'))$,

то, по определению, $\partial(\pi, \delta)$ отображает класс x' в $H_n(C')$ на класс $-u(x')$ в $H_n(C$, откуда следует а).

Пусть элемент $(y', x) \in \mathrm{Con}_n(u)$ таков, что $D(y', x) = 0$; тогда $(-d'y', dx - u(y')) = 0$. Так как $(y', x) = \tilde{\pi}(0, y', x)$ и

$\bar{D}(0, y', x) = (y', -d'y', dx - u(y')) = (y', 0, 0) = \tilde{u}(\delta(y', x))$,

то, по определению, $\partial(\tilde{u}, \tilde{\pi})$ отображает класс (y', x) в $H_n(\mathrm{Con}(u))$ на класс $\delta(y', x)$ в $H_{n-1}(C')$, откуда следует б).

Предложение 8. *Имеет место неограниченная точная последовательность*

$$\ldots \to H_n(C') \xrightarrow{H_n(u)} H_n(C) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n(\mathrm{Con}(u)) \xrightarrow{H_n(\delta)} H_{n-1}(C') \to \ldots \tag{8}$$

Действительно, если принять во внимание лемму 3, а), то это следует из теоремы 1 (с. 35), примененной к точной последовательности (7).

Следствие. *Для того чтобы морфизм и был гомологизмом, необходимо и достаточно, чтобы комплекс* $\mathrm{Con}(u)$ *имел нулевую гомологию.*

Замечание. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{H_n(\tilde{u})} & H_n(\mathrm{Cyl}\,(u)) & \xrightarrow{H_n(\tilde{\pi})} & H_n(\mathrm{Con}\,(u)) & \xrightarrow{\partial_n(\tilde{u}, \tilde{\pi})} & H_{n-1}(C') \longrightarrow & \ldots \\
& \downarrow 1 & & \downarrow H_n(\beta) & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & \\
\ldots \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{H_n(u)} & H_n(C) & \xrightarrow{H_n(\pi)} & H_n(\mathrm{Con}\,(u)) & \xrightarrow{H_n(\delta)} & H_{n-1}(C') \longrightarrow & \ldots,
\end{array}$$

в которой первая (соответственно вторая) строка представляет собой гомологическую точную последовательность, ассоциированную с точной последовательностью (6) (соответственно (7)). Отображения $H_n(\beta)$ биективны (предположение 7, в)), и диаграмма коммутативна, так как:

а) $u = \beta \circ \tilde{u}$ (предложение 7, а)), следовательно, $H_n(u) = H_n(\beta) \circ H_n(\tilde{u})$,

б) $H(\beta) = H_n(\alpha)^{-1}$ и $\pi = \tilde{\pi} \circ \alpha$ (предложение 7, а) и в)), следовательно, $H_n(\tilde{\pi}) = H_n(\pi) \circ H_n(\beta)$,

в) $H_n(\delta) = \partial_n(\tilde{u}, \tilde{\pi})$ (лемма 3, б)).

7. Конус инъективного морфизма; новое определение связывающего гомоморфизма

Рассмотрим теперь точную последовательность комплексов

$$0 \to C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \to 0. \tag{9}$$

Определим градуированное A-линейное отображение степени 0

φ: $\mathrm{Con}(u) \to C''$,

полагая $\varphi(y', x) = v(x)$. Имеем тогда коммутативную диаграмму A-модулей с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\tilde{u}} & \mathrm{Cyl}\,(u) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathrm{Con}\,(u) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow \beta & & \downarrow \varphi & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{v} & C'' & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{10}$$

Предложение 9. *Отображения* β *и* φ *– гомологизмы комплексов.*

Для β это следует из предложения 7, в). Имеем:

$\varphi \circ D(y', x) = \varphi(-d'y', dx - u(y')) = v(dx - u(y')) = v(dx) = d''v(x) = d''(\varphi(y', x))$,

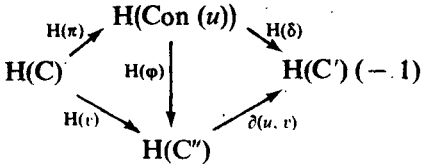
следовательно, φ – морфизм комплексов. С другой стороны, отображение φ сюръективно и его ядро отождествляется с комплексом (K, d_K), где $K = C'(-1) \oplus C'$,

$d_K(y', x') = (-d'y', d'x' - y')$;

если $d_K(y', x') = 0$, то $y' = d'x'$, следовательно, $(y', x') = d_K(-x', 0)$; отсюда следует, что $H(K) = 0$ и φ – гомологизм согласно следствию 1 на с. 36.

Замечание. Гомологизм β представляет собой гомотопизм, но φ, вообще говоря, не является гомотопизмом (см. с. 48, упражнение 8).

Следствие. *Диаграмма градуированных A-модулей*



коммутативна, и отображение $H(\varphi)$ *биективно.*

В коммутативной диаграмме (10) имеем: $H(1_{C'}) \circ \partial(\tilde{u}, \tilde{\pi}) = \partial(u, v) \circ H(\varphi)$ (с. 36, предложение 2) и $\partial(\tilde{u}, \tilde{\pi}) = H(\delta)$ (с. 41, лемма 3, б)), следовательно,

$$\partial(u, v) \circ H(\varphi) = H(\delta);$$

с другой стороны, $H(v) \circ H(\beta) = H(\varphi) \circ H(\tilde{\pi}) = H(\varphi) \circ H(\pi) \circ H(\beta)$, согласно замечанию на с. 42. Так как $H(\beta)$ биективно, то это дает, что $H(v) = H(\varphi) \circ H(\pi)$.

Имеем, следовательно, что $\partial(u, v) = H(\delta) \circ H(\varphi)^{-1}$, и это дает *новое определение* связывающего гомоморфизма $\partial(u, v)$. Отметим, с другой стороны, что если отождествить $H(\mathrm{Con}(u))$ с $H(C'')$ посредством $H(\varphi)$, то предыдущее следствие означает, что *точная последовательность* (8) *отождествляется с гомологической точной последовательностью относительно* (9).

8. Характеристики Эйлера–Пуанкаре

В этом пункте мы рассматриваем множество $\mathscr{C}$ классов A-модулей, которое *аддитивно* и *точное слева*, т.е. удовлетворяет следующим двум условиям:

(A) *Если* M *и* N *– два модуля типа* $\mathscr{C}$, *то* $M \oplus N$ *– модуль типа* $\mathscr{C}$.

(G) *Если* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *– точная последовательность* A*-модулей и если* M *и* M'' *типа* $\mathscr{C}$, *то* M' *типа* $\mathscr{C}$.

Говорят, что множество $\mathscr{C}$ *устойчивое*, если оно удовлетворяет следующим условиям, которые влекут за собой (A) и (G):

(E) (" $\mathscr{C}$ устойчиво относительно расширений".) Если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точная последовательность A-модулей и если M' и M'' типа $\mathscr{C}$, то M типа $\mathscr{C}$.

(S) (" $\mathscr{C}$ устойчиво относительно ядер и коядер".) Для всякого гомоморфизма f A-модулей типа $\mathscr{C}$ A-модули $\mathrm{Ker} f$ и $\mathrm{Coker} f$ имеют тип $\mathscr{C}$.

Обозначим через $K(\mathscr{C})$ группу Гротендика множества $\mathscr{C}$ и через $[M]_{\mathscr{C}}$ или $[M]$ элемент в $K(\mathscr{C})$, определяемый A-модулем M (VIII, § 6, n° 2). Пусть G – коммутативная группа и φ – гомоморфизм $K(\mathscr{C})$ в G.

Примеры. 1. Если A – поле, то можно взять в качестве $\mathscr{C}$ множество классов векторных пространств конечной размерности и в качестве φ – изоморфизм $K(\mathscr{C})$ на $\mathbf{Z}$, при котором $\varphi([M]) = \dim(M)$.

2. Можно взять в качестве $\mathscr{C}$ множество классов модулей конечной длины и в качестве φ: $K(\mathscr{C}) \to \mathbf{Z}$ – гомоморфизм, при котором $\varphi([M]) = \mathrm{long}_A M$.

Говорят, что градуированный A-модуль M имеет тип $\mathscr{C}$, если M_n – модуль типа $\mathscr{C}$ для всякого n (для этого необходимо, если M ограниченный, и достаточно, если $\mathscr{C}$ устойчиво, чтобы модуль M был типа $\mathscr{C}$).

Определение 8. Пусть M – ограниченный градуированный A-модуль типа $\mathscr{C}$ и (M_n) – его градуировка. Элемент $\Sigma(-1)^n \varphi([M_n])$ группы G называется *φ-характеристикой* модуля M и обозначается через $\chi_\varphi(M)$ или просто $\chi(M)$.

Это определение применяется, в частности, когда M – градуированный модуль, на котором определен некоторый комплекс A-модулей.

Примеры. 3. Если M ограниченный типа $\mathscr{C}$, то тем же свойством обладает $M(p)$ для всякого $p \in \mathbf{Z}$ и $\chi(M(p)) = (-1)^p \chi(M)$.

4. Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность градуированных A-модулей и градуированных гомоморфизмов степени 0. Если M, M' и M'' ограниченные

типа $\mathscr{C}$, то

$$\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'').$$

Если M и M'' – ограниченные типа $\mathscr{C}$, то таков же M'; если $\mathscr{C}$ устойчиво и если два из трех модулей ограниченные типа $\mathscr{C}$, то тем же свойством обладает и третий модуль.

5. Пусть u: C' → C – морфизм ограниченных комплексов типа $\mathscr{C}$. Тогда Con(u) – ограниченный комплекс типа $\mathscr{C}$ и

$$\chi(\mathrm{Con}(u)) = \chi(C) - \chi(C').$$

6. Можно взять в качестве G саму группу K($\mathscr{C}$) и в качестве φ – тождественное отображение; отметим, что в этом случае элемент $\chi_\varphi(M) = \Sigma(-1)^n[M_n]$ из K($\mathscr{C}$) обозначается через $\chi_{\mathscr{C}}(M)$.

Замечание. *Многочленом Пуанкаре* ограниченного градуированного модуля M типа $\mathscr{C}$ относительно φ называется элемент $P_M(t) = \Sigma\varphi([M_n])\,t^n \in G \otimes \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. Имеем: $P_M(1) = \varphi([M])$ и $P_M(-1) = \chi(M)$.

Лемма 4. *Пусть* C – *ограниченный комплекс типа* $\mathscr{C}$. *Если* H(C) = 0, *то* $\chi(C) = 0$.

Это следует из VIII, § 6, n° 1, cor. de la prop. 1.

Предложение 10. *Пусть* C *и* C' – *два ограниченных комплекса типа* $\mathscr{C}$. *Если существует гомологизм* u: C' → C, *то* $\chi(C) = \chi(C')$.

Действительно, Con(u) – ограниченный комплекс типа $\mathscr{C}$ и $\chi(\mathrm{Con}(u)) = \chi(C) - \chi(C')$; с другой стороны, H(Con(u)) = 0 согласно следствию на с. 42, следовательно, $\chi(\mathrm{Con}(u)) = 0$ (лемма 4).

Предложение 11. *Пусть* C – *ограниченный комплекс типа* $\mathscr{C}$.

а) *Если* $\mathscr{C}$ *устойчиво, то* H(C) – *модуль типа* $\mathscr{C}$.

б) *Если* H(C) *типа* $\mathscr{C}$, *то тем же свойством обладают* B(C) *и* Z(C) *и* $\chi(H(C)) = \chi(C)$.

а) Если $\mathscr{C}$ устойчиво, то для всякого n модуль $Z_n(C)$ имеет тип $\mathscr{C}$ как ядро гомоморфизма d_n: $C_n \to C_{n-1}$ и $H_n(C)$ типа $\mathscr{C}$ как коядро гомоморфизма $C_{n+1} \to Z_n$. С другой стороны, $H_n(C) = 0$, когда $C_n = 0$.

б) Предположим, что H(C) типа $\mathscr{C}$. Канонические точные последовательности

$$0 \to Z_n(C) \to C_n \to B_{n-1}(C) \to 0, \quad 0 \to B_n(C) \to Z_n(C) \to H_n(C) \to 0$$

показывают индукцией по n, начиная с правой границы C, что $Z_n(C)$ и $B_n(C)$ имеют тип $\mathscr{C}$ для всякого n. Имеем тогда:

$$\chi(C) = \chi(Z(C)) + \chi(B(C)(-1)) = \chi(Z(C)) - \chi(B(C)) = \chi(H(C)).$$

Следствие. *Если* $\mathscr{C}$ *устойчиво и* C – *ограниченный комплекс типа* $\mathscr{C}$, *то градуированный модуль* H(C) *ограниченный, имеет тип* $\mathscr{C}$ *и* $\chi(H(C)) = \chi(C)$.

Предложение 12. *Пусть* $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ – *точная последовательность комплексов.*

а) *Если* H(C), H(C') *и* H(C'') *ограниченные типа* $\mathscr{C}$, *то*

$$\chi(H(C)) = \chi(H(C')) + \chi(H(C'')).$$

б) *Если* $\mathscr{C}$ *устойчиво и если два из трех градуированных модулей* H(C), H(C') *и* H(C'') *ограниченные типы* $\mathscr{C}$, *то тем же свойством обладает и третий.*

Часть а) следует из леммы 4, примененной к комплексу с нулевой гомологией, определяемому гомологической точной последовательностью, соответствующей данной точной последовательности. Часть б) вытекает, если рассмотреть эту же гомологическую точную последовательность, из следующей леммы:

Лемма 5. *Пусть* $M \to N \to P \to Q \to R$ – *точная последовательность* A-*модулей. Если* $\mathscr{C}$ *устойчиво и если* M, N, Q, R – *модули типа* $\mathscr{C}$, *то модуль* P *также типа* $\mathscr{C}$.

Положим N' = Coker(M → N) и Q' = Ker(Q → R). Модули N' и Q' типа $\mathscr{C}$, и имеем точную последовательность $0 \to N' \to P \to Q' \to 0$.

Следствие. *Предположим, что* $\mathscr{C}$ *устойчивое, и пусть* u: C' → C – *морфизм комплексов, для которых* H(C) *и* H(C') *ограниченные типа* $\mathscr{C}$. *Тогда* H(Con(u)) *ограниченный типа* $\mathscr{C}$ *и*

$$\chi(H(\mathrm{Con}(u))) = \chi(H(C)) - \chi(H(C')).$$

Это следует из предложения 12, примененного к точной последовательности комплексов (с. 41, предложение 7)

$$0 \to C \to \mathrm{Con}(u) \to C'(-1) \to 0.$$

Замечание. Пусть E – комплекс, h: $E \to C$ и h': $E \to C'$ – гомотопизмы, где C и C' ограниченные типа $\mathscr{C}$. Тогда имеем: $\chi(C) = \chi(C')$. Действительно, если h_1 – морфизм, обратный к h с точностью до гомотопии, то $h' \circ h_1$ – гомотопизм, следовательно, гомологизм C в C', и можно применить предложение 10. Следовательно, можно распространить определение 8, положив $\chi(E) = \chi(C)$, когда существует гомотопизм E на ограниченный комплекс C типа $\mathscr{C}$. Предложения 10, 11, 12 и их следствия обобщаются на эту ситуацию.

Приложение:

* Пусть X – топологическое пространство, допускающее конечное клеточное разбиение (см. п. 3).

а) Пусть K и K' – два поля, положим $b_i = \dim_K(H_i(X, K))$ и $b'_i = \dim_{K'}(H_i(X, K'))$. Не обязательно $b_i = b'_i$, но $\Sigma(-1)^i b_i = \Sigma(-1)^i b'_i$.

б) Пусть (X_n) и (X'_n) – два конечных клеточных разбиения пространства X, и обозначим через c_n и c'_n число клеток размерности n в этих двух разбиениях. Имеем:

$$\Sigma(-1)^i c_i = \Sigma(-1)^i c'_i.$$

в) В обозначениях из а) и б) имеем: $\Sigma(-1)^i c_i = \Sigma(-1)^i b_i$.

Свойства а) и б) следуют из в), а в) следует из предложения 11, примененного к комплексу Г, описанному в п. 3, если в качестве $\mathscr{C}$ взять класс векторных K-пространств конечной размерности и в качестве φ функцию, при которой $\varphi([M]) = \dim_K(M)$ (с. 43, пример 1). ∎

9. Комплексы правых модулей, комплексы мультимодулей

Комплекс правых A-модулей – это градуированный правый A-модуль $(M_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, наделенный градуированным эндоморфизмом d степени -1 с нулевым квадратом; таким образом, это комплекс модулей над кольцом A°, противоположным A. Все определения и свойства, сформулированные в предыдущих пунктах, следовательно, применимы к комплексам правых модулей, рассматриваемым как комплексы модулей над кольцом A°.

Кроме того, если A и B – два кольца, то *комплекс* (A, B)*-бимодулей* – это градуированный (A, B)-бимодуль M, наделенный градуированным эндоморфизмом d степени -1 с нулевым квадратом; если M наделить его канонической структурой левого $A \otimes_{\mathbf{Z}} B^\circ$-модуля, то d определяет на M структуру $A \otimes_{\mathbf{Z}} B^\circ$-комплекса. Все определения и свойства, сформулированные в предыдущих пунктах, применимы, следовательно, к комплексам бимодулей. Аналогичным образом определяются *комплексы мультимодулей.*

10. Пример: комплекс де Рама

В этом пункте мы предполагаем, что A – *коммутативная* k-*алгебра* над некоторым коммутативным кольцом k. Через $\Omega^1_{A/k}$ мы обозначаем A-модуль k-дифференциалов алгебры A (III, p. 134), через d^0: $A \to \Omega^1_{A/k}$ – k-дифференцирование $d_{A/k}$ и через $\Omega_{A/k}$ – градуированную k-алгебру $\Lambda_A(\Omega^1_{A/k})$.

Предложение 13. *Существует единственное* k-*антидифференцирование* d: $\Omega_{A/k} \to \Omega_{A/k}$ *степени* 1 *с нулевым квадратом, которое продолжает дифференцирование* d^0: $A \to \Omega^1_{A/k}$.

Докажем единственность антидифференцирования d. Так как $d \circ d = 0$, то для $y, x_1, \ldots, x_p \in A$ имеем:

$$d(y dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = dy \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p.$$

Так как A-модуль $\Omega^p_{A/k}$ порождается элементами $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$, это доказывает единственность d.

Для доказательства существования достаточно построить k-гомоморфизм $d^1: \Omega^1_{A/k} \to \Omega^2_{A/k}$, удовлетворяющий условиям: $d^1 \circ d^0 = 0$ и

$$d^1(a\omega) = d^0(a) \wedge \omega + a d^1(\omega) \text{ для } a \in A,\ \omega \in \Omega^1_{A/k}. \tag{11}$$

Действительно, тогда из III, p. 128, prop. 14 (с учетом III, p. 118, remarque 2) следует, что существует антидифференцирование $d: \Omega_{A/k} \to \Omega_{A/k}$, совпадающее с d^0 в степени 0 и с d^1 в степени 1. Так как d^0 нулевое на k, то антидифференцирование d k-линейно; так как $d^1 \circ d^0 = 0$, то $d \circ d = 0$, поскольку $\Omega_{A/k}$ порождается как A-алгебра элементами $d^0 a$ для $a \in A$.

Для определения d^1 напомним (III, p. 133), что модуль $\Omega^1_{A/k}$ равен A-модулю $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, где $\mathfrak{J}$ — ядро умножения $m: A \otimes_k A \to A$. Рассмотрим k-линейное отображение $u: A \otimes_k A \to \Omega^2_{A/k}$, при котором $u(x \otimes y) = d^0(y) \wedge d^0(x)$. Имеем:

$$u(ax \otimes y - x \otimes ay) = d^0(y) \wedge d^0(ax) - d^0(ay) \wedge d^0(x) = d^0(xy) \wedge d^0(a)$$

для x, y и a из A, откуда

$$u((a \otimes 1 - 1 \otimes a)\xi) = d^0(m(\xi)) \wedge d^0(a), \quad \xi \in A \otimes_k A, \quad a \in A. \tag{12}$$

Так как $\mathfrak{J}$ порождается как правый A-модуль элементами $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)$ для $a \in A$, то отсюда выводим, что $u(\mathfrak{J}^2) = 0$, следовательно, u посредством ограничения на $\mathfrak{J}$ и перехода к фактормодулю определяет k-линейное отображение $d^1: \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \to \Omega^2_{A/k}$.

Положив в (12) $\xi = b \otimes 1$ с $b \in A$, получим, что $d^1(b d^0(a)) = d^0(b) \wedge d^0(a)$; отсюда следует, что $d^1 \circ d^0 = 0$ и $d^1(c\omega) = d^0(c) \wedge \omega + c d^1(\omega)$ для $c \in A$ и $\omega = b d^0(a)$. Так как $\Omega^1_{A/k}$ порождается как k-модуль элементами $b d^0(a)$ для a и b из A, то формула (11) выполняется для всякого $\omega \in \Omega_{A/k}$, что завершает доказательство предложения.

Элементы $\omega \in \Omega^p_{A/k}$ иногда называют *внешними дифференциальными формами степени* p на A над k, а антидифференцирование d — *внешним дифференциалом* на $\Omega_{A/k}$; комплекс $(\Omega_{A/k}, d)$ называется *комплексом де Рама алгебры* A *над* k, а его гомология — *когомологией де Рама алгебры* A *над* k.

Пример 1. Возьмем в качестве A кольцо $k[X_1, \ldots, X_n]$. Тогда $\Omega^1_{A/k}$ — свободный A-модуль с базисом $dX_1, \ldots, dX_n$ (III, p. 134, exemple). Следовательно, если для всякого подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ в $[1, n]$ положить $dX_I = dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_p}$ (где $i_1 < \ldots < i_p$), то A-модуль $\Omega^p_{A/k}$ имеет в качестве базиса элементы dX_I, где I пробегает множество подмножеств в $[1, n]$ мощности p. Имеем:

$$d(P\,dX_I) = dP \wedge dX_I = \sum_{i \notin I} (-1)^{n(I,i)} \frac{\partial P}{\partial X_i}\, dX_{I \cup \{i\}},$$

где $n(I, i)$ обозначает число элементов в I, меньших i.

Следовательно, циклы из $Z^p(\Omega_{A/k})$ — это такие элементы $\omega = \sum_{\mathrm{Card}(I) = p} P_I\, dX_I$, что для всякого подмножества J в $[1, n]$, содержащего $(p+1)$ элементов,

$$\sum_{i \in J} (-1)^{n(J,i)} \frac{\partial P_{J - \{i\}}}{\partial X_i} = 0.$$

Элемент ω является границей, если для всякого подмножества $J \subset [1, n]$, содержащего $(p-1)$ элементов, можно выбрать многочлен $Q_J \in A$ так, что

$$P_I = \sum_{j \in I} (-1)^{n(I,j)} \frac{\partial Q_{I - \{j\}}}{\partial X_j}.$$

Мы увидим в § 9, что комплекс де Рама алгебры A над k ацикличен в степенях > 0, если k — Q-алгебра (с. 166, замечание 4).

*Пример 2. Предположим, что $k = C$ и $A = C[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_r)$, где P_i — такие многочлены от $X_1, \ldots, X_n$, что множество точек в C^n, в которых все P_i обращаются в нуль, представляет собой аналитическое подмногообразие V в C^n. Можно показать, что когомология де Рама алгебры A над C изоморфна *сингулярной когомологии* $H(V, C)$. *

Пусть теперь M – A-модуль и ∇^0 – k-линейное отображение M в $M \otimes_A \Omega^1_{A/k}$, для которого

$$\nabla^0(am) = a\nabla^0(m) + m \otimes da \quad \text{при} \quad a \in A, \quad m \in M \tag{13}$$

(иногда говорят, что ∇^0 – *связность* на A-модуле M).

Предложение 14. (i) *Существует единственное градуированное степени* 1 *k-линейное отображение ∇ правого $\Omega_{A/k}$-модуля $M \otimes_A \Omega_{A/k}$ в себя, которое продолжает ∇^0 в степени* 0 *и удовлетворяет тождеству*

$$\nabla(x\omega) = (\nabla x)\,\omega + (-1)^p x(d\omega) \quad \textit{для} \quad x \in M \otimes_A \Omega^p_{A/k}, \ \omega \in \Omega_{A/k}. \tag{14}$$

(ii) *Композиция $\nabla \circ \nabla$ представляет собой $\Omega_{A/k}$-линейное отображение; в частности, отображение $R = \nabla^1 \circ \nabla^0$ модуля M в $M \otimes_A \Omega^2_{A/k}$ A-линейно, и*

$$\nabla \circ \nabla(m \otimes \omega) = R(m) \cdot \omega \quad \textit{для} \quad m \in M, \quad \omega \in \Omega_{A/k}.$$

Гомоморфизм R иногда называют *гомоморфизмом кривизны*, соответствующим связности ∇^0; если он нулевой, то пара $(M \otimes_A \Omega_{A/k}, \nabla)$ представляет собой комплекс, также называемый *комплексом де Рама пары* (M, ∇^0) *над* k.

Докажем (i). Единственность ∇ очевидна. Определим k-гомоморфизм $\bar{\nabla}$ модуля $M \otimes_k \Omega_{A/k}$ в $M \otimes_A \Omega_{A/k}$, положив

$$\bar{\nabla}(m \otimes_k \omega) = (\nabla^0 m)\,\omega + m \otimes d\omega \quad \textit{для} \quad m \in M, \quad \omega \in \Omega_{A/k}.$$

Из (13) следует, что $\bar{\nabla}(am \otimes \omega) = \bar{\nabla}(m \otimes a\omega)$, так что мы получаем посредством перехода к фактормодулю градуированный степени 1 k-гомоморфизм ∇ модуля $M \otimes_A \Omega_{A/k}$ в себя, продолжающий ∇^0 в степени 0. Проверим (14): для $m \in M$, $\alpha \in \Omega^p_A$, $\omega \in \Omega_{A/k}$ имеем:

$$\nabla((m \otimes \alpha) \cdot \omega) = \nabla(m \otimes (\alpha \wedge \omega)) =$$

$$= \nabla^0(m) \cdot (\alpha \wedge \omega) + m \otimes d(\alpha \wedge \omega) =$$

$$= \nabla^0(m)\,\alpha \cdot \omega + (m \otimes d\alpha)\,\omega + (-1)^p (m \otimes \alpha)\,d\omega =$$

$$= (\nabla(m \otimes \alpha)\,\omega + (-1)^p (m \otimes \alpha)\,d\omega,$$

что доказывает (14) при $x = m \otimes \alpha$; общий случай выводится по линейности.

Докажем (ii). Пусть $x \in M \otimes_A \Omega^p_{A/k}$, $\omega \in \Omega_{A/k}$; повторным применением тождества (14) получаем:

$$\nabla \circ \nabla(x\omega) = \nabla(\nabla(x)\,\omega + (-1)^p \nabla(x d\omega) =$$

$$= (\nabla \circ \nabla(x))\,\omega + (-1)^{p+1} \nabla(x)(d\omega) + (-1)^p \nabla(x)(d\omega) = (\nabla \circ \nabla(x))\,\omega,$$

что доказывает первое утверждение из (ii); другие выводятся непосредственно.

Упражнения

1. Предположим, что A – кольцо главных идеалов; пусть C – комплекс *свободных* A-модулей.

а) Показать, что C – прямая сумма семейства комплексов $({}^pE)_{p \in \mathbf{Z}}$, удовлетворяющих условиям: ${}^pE_n = 0$ при $n \neq p$, $p-1$; $Z_p({}^pE) = 0$.

б) Предположим дополнительно, что C_n конечного типа для всякого $n \in \mathbf{Z}$. Показать, что C – прямая сумма комплексов, имеющих только либо одну ненулевую компоненту, либо две последовательных ненулевых компоненты, причем эти компоненты изоморфны A.

2. Пусть C и C′ – два комплекса A-модулей; предположим, что комплексы C и B(C) (соответственно C′ и Z(C′)) проективны (соответственно инъективны). Показать, что всякий морфизм комплексов из H(C) в H(C′) индуцируется морфизмом из C в C′.

3. Пусть C – комплекс A-модулей; рассматриваем C как $A(\epsilon)$-модуль (с. 33). Обозначим через

$$i\colon A \to A(\epsilon)$$

каноиическое вложеиие.

Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) Модуль C i-проективен (с. 27, упражнение 19).

(ii) Модуль C i-иъективен (с. 27, упражнеиие 19).

(iii) Комплекс C гомотопен нулю.

(iv) Существуют градуированный A-модуль M и изоморфизм градуированных $A(\epsilon)$-модулей $A(\epsilon) \otimes_A M \to C$.

(v) Существуют градуированный A-модуль N и изоморфизм градуированных $A(\epsilon)$-модулей $C \to \mathrm{Hom}_A(A(\epsilon), N)$.

4. а) Пусть C – A-комплекс, ограниченный справа, причем комплексы C и H(C) проективны. Показать, что C расщепляем.

б) Над кольцом $B = A(\epsilon)$ (с. 33) рассмотрим комплекс C, для которого $C_n = B$ при всяком n и $d(b) = \epsilon b$ при всяком $b \in B$. Комплекс C свободный с нулевой гомологией, но не расщепляем.

5. Пусть C – комплекс, s – расщепление C, δ: $C \to C$ – градуированный гомоморфизм степени -1, для которого $(d+\delta) \circ (d+\delta) = 0$. Обозначим через C' комплекс $(C, d+\delta)$. Предположим, что A-линейное отображение $\theta = 1_C + \delta s$ из C в C *биективно*.

а) Для того чтобы отображение $s\theta^{-1}$ было расщеплением C', необходимо и достаточно, чтобы $\delta(Z(C)) \subset \theta(B(C))$.

б) Предположим, что условия из а) выполняются. Показать, что существуют разложения в прямую сумму $C = B(C) \oplus \mathrm{Ker}(ds) = B(C') \oplus \mathrm{Ker}(ds)$. Если p (соответственно p') – проектор с образом $\mathrm{Ker}(ds)$ и ядром B(C) (соответственно B(C')), то $p' = p\theta^{-1}$.

в) Предположим дополнительно, что A-линейное отображение $\lambda = 1_C + s\delta$ биективно. Показать, что $Z(C') = \lambda^{-1}(Z(C))$ и $C = Z(C) \oplus \mathrm{Im}(sd) = Z(C') \oplus \mathrm{Im}(sd)$. Если q (соответственно q') – проектор с образом Z(C) (соответственно Z(C')) и ядром $\mathrm{Im}(sd)$, то $q' = \lambda^{-1}q$.

6. Сохраняем обозначения из упражнения 5; предположим, кроме того, что кольцо A коммутативно, что комплексы C и $C'/B(C')$ плоские и что существует идеал $\mathfrak{m}$ кольца A, удовлетворяющий условиям: $\delta(C) \subset \mathfrak{m}C$ и $\bigcap_n (B(C) + \mathfrak{m}^n C) = B(C)$ (*это последнее условие всегда выполняется, если A – нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и если C_n – A-модуль конечного типа для всякого n, см. AC, III, § 3, n° 3, prop. 6; Коммутативная алгебра, III, с. 249, предложение 6 *).

Показать тогда, что $s\theta^{-1}$ – расщепление C'.

(Предположения о плоскостности влекут, что $\mathrm{Im}(d+\delta) \cap \mathfrak{m}^n C = (d+\delta)(\mathfrak{m}^n C)$ для всякого n; если $x \in Z(C)$, то построить по индукции элементы $y_n \in C$, $z_n \in Z(C) \cap \mathfrak{m}^n C$, для которых $\delta(x) = \theta d(y_n) + \delta(z_n)$. Закончить с помощью упражнения 5, а).)

7. Пусть C и C' – два комплекса, s (соответственно s') – расщепление C (соответственно C'), u: $C' \to C$ – морфизм комплексов. Определим градуированный степени -1 A-эндоморфизм σ комплекса $\mathrm{Con}(u)$, положив

$$\sigma(y', x) = (-s'(y'), s(x) - sus'(y')).$$

Показать, что для того чтобы отображение σ было расщеплением комплекса $\mathrm{Con}(u)$, необходимо и достаточно, чтобы $H(u) = 0$.

8. Пусть $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ – точная последовательность A-модулей, которую можно рассматривать как точную последовательность комплексов (нулевых в степенях $\neq 0$). Показать, что морфизм комплексов φ: $\mathrm{Con}(u) \to M''$ (с. 42) является гомотопизмом, если и только если точная последовательность $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ расщепляема.

9. Пусть u: $C' \to C$ – морфизм A-комплексов. Обозначим через v: $C \to \mathrm{Coker}(u)$ отображение перехода к факторкомплексу. Рассмотрим градуированные A-гомоморфизмы

$$\alpha\colon (\mathrm{Ker}\, u)(-1) \to \mathrm{Con}(u) \quad \text{и} \quad \varphi\colon \mathrm{Con}(u) \to \mathrm{Coker}(u),$$

определяемые по формулам: $\alpha(x') = (x', 0)$, $\varphi(x', x) = v(x)$ для $x' \in C'$, $x \in C$. Показать, что α, φ – морфизмы комплексов и что они приводят к точной последовательности

$$\ldots \to H_{n-1}(\mathrm{Ker}\, u) \xrightarrow{H(\alpha)} H_n(\mathrm{Con}(u)) \xrightarrow{H(\varphi)} H_n(\mathrm{Coker}\, u) \xrightarrow{\delta} H_{n-2}(\mathrm{Ker}\, u) \to \ldots,$$

где δ – композиция связывающих гомоморфизмов относительно двух точных последовательностей

$$0 \to \mathrm{Ker}\, u \to C' \to \mathrm{Im}\, u \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to \mathrm{Im}\, u \to C \to \mathrm{Coker}\, u \to 0.$$

10. Пусть u: $C \to C'$ – морфизм A-комплексов, P – проективный A-модуль, n – целое число $\geqslant 0$,

h: $P \to H_n(\mathrm{Con}(u))$

– A-гомоморфизм. Показать, что существуют комплекс $\tilde{C}$, точная последовательность комплексов

$$0 \to C \xrightarrow{i} \tilde{C} \to P(-n) \to 0$$

и морфизм $\tilde{u}$: $\tilde{C} \to C'$, для которых $\tilde{u} \circ i = u$ и морфизм $C(i)$: $\mathrm{Con}(u) \to \mathrm{Con}(\tilde{u})$, индуцированный отображением i, обладает следующими свойствами:

α) Отображение $H_p(C(i))$: $H_p(\mathrm{Con}(u)) \to H_p(\mathrm{Con}(\tilde{u}))$ биективно при $p \neq n$, $n+1$;

β) Существует точная последовательность

$$0 \to H_{n+1}(\mathrm{Con}(u) \xrightarrow{H_{n+1}(C(i))} H_{n+1}(\mathrm{Con}(\tilde{u})) \to P \xrightarrow{h} H_n(\mathrm{Con}(u)) \xrightarrow{H_n(C(i))} H_n(\mathrm{Con}(\tilde{u})) \to 0.$$

11. *Бикомплексом* A-модулей называется тройка (C, d', d''), где C – A-модуль, градуированный по типу $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, d': $C \to C$ – градуированный A-эндоморфизм степени $(-1, 0)$ и d'': $C \to C$ – градуированный A-эндоморфизм степени $(0, -1)$, удовлетворяющие соотношениям $d' \circ d' = d'' \circ d'' = d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$. Будет использоваться также верхняя градуировка $C^{p,q} = C_{-p,-q}$ для $p, q \in \mathbf{Z}$.

Обозначим через $Z'(C)$, $Z''(C)$, $B'(C)$, $B''(C)$ подбикомплексы $\mathrm{Ker}(d')$, $\mathrm{Ker}(d'')$, $\mathrm{Im}(d')$, $\mathrm{Im}(d'')$ и через $H'(C)$ (соответственно $H''(C)$) бикомплекс $Z'(C)/B'(C)$ (соответственно $Z''(C)/B''(C)$).

а) Положим $d = d' + d''$. Показать, что когда C наделен тотальной градуировкой, ассоциированной с заданной биградуировкой (определяемой, согласно II, p. 164, посредством $C_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$), пара (C, d) представляет собой комплекс. Говорят, что это *комплекс, ассоциированный* с бикомплексом (C, d', d''); его гомология обозначается через $H(C)$.

б) Пусть (C, d', d'') и (K, δ', δ'') – два бикомплекса. *Морфизмом* из (C, d', d'') в (K, δ', δ'') называется градуированный A-гомоморфизм и степени $(0, 0)$ из C в K, удовлетворяющий условиям: $\delta' \circ u = u \circ d'$ и $\delta'' \circ u = u \circ d''$. Показать, что u индуцирует морфизм ассоциированных комплексов.

в) Пусть u, v – морфизмы бикомплексов из C в K. *Гомотопией, связывающей* u с v, называется пара (s', s'') градуированных A-гомоморфизмов из C в K степеней $(1, 0)$ и $(0,1)$ соответственно, для которой

$$v - u = d' \circ s' + s' \circ d' + d'' \circ s'' + s'' \circ d''; \quad s' \circ d'' + d'' \circ s' = 0; \quad s'' \circ d' + d' \circ s'' = 0.$$

Показать, что $s' + s''$ – гомотопия, связывающая морфизмы ассоциированных комплексов, индуцированные морфизмами u и v.

12. Пусть (C, d', d'') – бикомплекс, для которого $H''_{p,-p}(C) = 0$ при всяком $p \in \mathbf{Z}$, $H'_{-q,q+1}(C) = 0$ при $q \geqslant 0$, $H'_{r,-r-1}(C) = 0$ при $r \geqslant 0$ и существуют такие положительные целые числа a и b, что $C_{a,-a} = C_{-b,b} = 0$. Доказать, что A-модуль $H'_{0,0}(C)$ нулевой.

13. Пусть I – конечное множество; через $(e_i)_{i \in I}$ будем обозначать канонический базис Z-модуля $\mathbf{Z}^I$. Назовем I-*комплексом* (соответственно I-*предкомплексом*) A-модулей A-модуль C, градуированный по типу $\mathbf{Z}^I$, наделенный семейством A-эндоморфизмов $(d_i)_{i \in I}$, причем d_i градуированный степени $(-e_i)$ и выполняются следующие соотношения:

$d_i \circ d_i = 0$ для всякого $i \in I$,

$d_i \circ d_j + d_j \circ d_i = 0$ (соответственно $d_i \circ d_j = d_j \circ d_i$) для $i, j \in I$.

Если $\mathrm{Card}(I) = 1$, то I-комплекс – это комплекс; если $\mathrm{Card}(I) = 2$, то I-комплекс представляет собою бикомплекс (упражнение 11). Если $(C, (d_i))$ и $(C', (d'_i))$ – два I-комплекса (соответственно I-предкомплекса), то *морфизм* из $(C, (d_i))$ в $(C', (d'_i))$ – это градуированный гомоморфизм степени нуль u: $C \to C'$, для которого $d'_i \circ u = u \circ d_i$ при всяком $i \in I$.

а) Пусть $(C, (d_i))$ – I-комплекс. Если наделить C тотальной градуировкой (по типу Z), получаемой из его градуировки, то показать, что $(C, \sum_{i \in I} d_i)$ представляет собой комплекс A-модулей, называемый *комплексом, ассоциированным* с I-комплексом $(C, (d_i))$. Показать, что морфизм I-комплексов индуцирует морфизм ассоциированных комплексов.

б) Пусть C – I-предкомплекс, и пусть R – некоторое отношение линейного порядка на I, обозначаемое символом $\leqslant$. Для $k = (k_i)_{i \in I}$, $x \in C_k$ и $i \in I$ положим $\delta_i(x) = (-1)^{\sum_{j<i} k_j} d_i(x)$. Показать, что $(C, (\delta_i))$ представляет собой I-комплекс (который обозначают через C_R).

в) Пусть R_α, R_β – два отношения линейного порядка на I, обозначаемые символами $\leqslant_\alpha$ и $\leqslant_\beta$. Пусть $u_{\beta\alpha}$ – эндоморфизм C, при котором $u(x) = (-1)^{\epsilon(k)} x$ для $x \in C_k$, где $\epsilon(k) = \sum_{\substack{i <_\alpha j \\ j <_\beta i}} k_i k_j$. Показать, что $u_{\beta\alpha}$ – морфизм I-комплексов из C_{R_α} в C_{R_β}.

г) Пусть S – множество всех отношений линейного порядка на I; наделим S тривиальным отношением предпорядка (т.е. $R_\alpha \leqslant R_\beta$ для любых R_α, $R_\beta \in S$). Показать, что система $(C_{R_\alpha}, u_{\alpha\beta})$ представляет собой проективную систему I-комплексов относительно S, ее предел $\tilde{C}$ – это I-комплекс, называемый I-комплексом, ассоциированным с I-предкомплексом C. Показать, что всякий морфизм I-предкомплексов индуцирует морфизм ассоциированных I-комплексов.

¶ 14. *Спектральной последовательностью* A-модулей называется задание последовательности A-комплексов $(E_r, d_r)_{r \geqslant 2}$ и отображений α_r: $H(E_r) \to E_{r+1}$, для которых:

(i) Градуировка комплекса E_r представляет собой тотальную градуировку, ассоциированную с некоторой биградуировкой

$$E_r = \bigoplus_{p,q \in \mathbf{Z}} E_r^{p,q} \quad (r \geqslant 2);$$

имеет место: $d_r(E_r^{p,q}) \subset E_r^{p+r,q-r+1}$.

(ii) Отображения α_r являются изоморфизмами биградуированных A-модулей.

Мы будем использовать также нижнюю биградуировку модуля E_r; будем обозначать $E_{p,q}^r = E_r^{-p,-q}$.

а) Здесь мы будем обозначать через $Z_{r+1}(E_r)$ (соответственно через $B_{r+1}(E_r)$) биградуированный A-модуль $\mathrm{Ker}\, d_r$ (соответственно $\mathrm{Im}\, d_r$). Пусть

p_r: $E_r \to E_r/B_{r+1}(E_r)$

– отображение перехода к фактормодулю и i_r: $E_{r+1} \to E_r/B_{r+1}(E_r)$ – композиция отображения

α_r^{-1} и естественного вложения. Для всякого $r \geqslant 2$ определим индукцией по k биградуированные подмодули $Z_{r+k}(E_r)$ и $B_{r+k}(E_r)$ в E_r, положив:

$$Z_{r+k}(E_r) = p_r^{-1}(i_r(Z_{r+k}(E_{r+1}))), \qquad B_{r+k}(E_r) = p_r^{-1}(i_r(B_{k+r}(E_{r+1}))).$$

Доказать, что имеют место вложения:

$$0 \subset B_{r+1}(E_r) \subset B_{r+2}(E_r) \subset \ldots \subset Z_{r+2}(E_r) \subset Z_{r+1}(E_r) \subset E_r$$

и что модуль E_k изоморфеи $Z_k(E_r)/B_k(E_r)$ при $k \geqslant r+1$.

Положим $Z_\infty(E_2) = \bigcap_{r \geqslant 3} Z_r(E_2)$, $B_\infty(E_2) = \bigcup_{r \geqslant 3} B_r(E_2)$ и $E_\infty = Z_\infty(E_2)/B_\infty(E_2)$. Говорят, что спектральная последовательность *регулярна*, если убывающая последовательность $(Z_r(E_2^{p,q}))_{r \geqslant 3}$ *стационарна* для всякой пары (p, q).

б) Пусть $E = (E_r, d_r, \alpha_r)_{r \geqslant 2}$ и $E' = (E'_r, d'_r, \alpha'_r)_{r \geqslant 2}$ – две спектральные последовательности А-модулей; *морфизмом* из E в E′ иазывается последовательность морфизмов А-комплексов u_r: $E_r \to E'_r$, совместимых с биградуировками и таких, что $\alpha'_r \circ H(u_r) = u_{r+1} \circ \alpha_r$ для всякого $r \geqslant 2$. Показать, что для всякого $r \geqslant 2$ и всякого $k \geqslant r+1$ u_r индуцирует гомоморфизм $Z_k(E_r)$ (соответственно $B_k(E_r)$) в $Z_k(E'_r)$ (соответствеиио $B_k(E'_r)$). В частности, u_2 иидуцирует гомоморфизмы $Z_\infty(u_2)$: $Z_\infty(E_2) \to Z_\infty(E'_2)$, $B_\infty(u_2)$: $B_\infty(E_2) \to B_\infty(E'_2)$, u_∞: $E_\infty \to E'_\infty$; все эти гомоморфизмы совместимы с биградуировками.

в) Предположим, что u_2 – изоморфизм. Показать, что тогда u_r – изоморфизм для всякого $r \geqslant 2$, так же как и $B_\infty(u_2)$. Если, кроме того, спектральные последовательности E и E′ регулярны, то $Z_\infty(u_2)$ и u_∞ – изоморфизмы.

г) Пусть $G = \bigoplus_{n \in Z} G^n$ – градуированный А-модуль, наделенный убывающей последовательностью $(F^pG)_{p \in Z}$ градуированиых А-подмодулей, для которой $\bigcap_p F^pG = 0$ и $\bigcup_p F^pG = G$. Говорят, что спектральная последовательность E *аппроксимирует* $(G, (F^pG)_{p \in Z})$ (или просто G), если существуют изоморфизмы $\beta^{p,q}$: $E_\infty^{p,q} \to (F^pG)^{p+q}/(F^{p+1}G)^{p+q}$ для всякого $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Говорят, что спектральная последовательность E *сходится* к G, если она аппроксимирует G и если, кроме того:

(i) спектральная последовательность E регулярна;

(ii) для всякого целого n существует такое целое p, что $(F^pG)^n = 0$.

Предположим, что E (соответственно E′) сходится к G (соответственно G′). Пусть u: $E \to E'$ – морфизм спектральных последовательностей, v: $G \to G'$ – такой градуированный гомоморфизм степени 0, что $v(F^pG) \subset F^pG'$ при всяком p и иидуцированиые гомоморфизмы $\bar{v}^{p,n}$: $(F^pG)^n/(F^{p+1}G)^n \to (F^pG')^n/(F^{p+1}C')^n$ удовлетворяют соотиошению $\bar{v}^{p,p+q} \circ \beta^{p,q} = \beta'^{p,q} \circ u_\infty^{p,q}$ для всякой пары (p, q). Показать, что если $u_2^{p,q}$ – изоморфизм для всякой пары (p, q), то v – изоморфизм.

15. Пусть E – спектральная последовательность А-модулей, которая аппроксимирует градуированный А-модуль G (упражнение 14).

а) Предположим, что $E_2^{p,q} = 0$ при $p < 0$. Показать, что отображения α_r^{-1} индуцируют для всякого q инъективиые гомоморфизмы:

$$E_\infty^{0,q} \to \ldots \to E_3^{0,q} \to E_2^{0,q},$$

откуда посредством композиции с $(\beta^{0,q})^{-1}$ и с отображением перехода к фактормодулю получается А-гомоморфизм γ^q: $G^q \to E_2^{0,q}$.

б) Предположим, что $E_2^{p,q} = 0$ при $q < 0$. Показать, что отображения α_r индуцируют сюръективные гомоморфизмы

$$E_2^{p,0} \to E_3^{p,0} \to \ldots \to E_\infty^{p,0},$$

откуда посредством композиции с $\beta^{p,0}$ получается А-гомоморфизм δ^p: $E_2^{p,0} \to G^p$.

в) Предположим, что удовлетворяются условия из а) и б), т.е. $E_2^{p,q} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$. Показать, что последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \xrightarrow{\delta^1} G^1 \xrightarrow{\gamma^1} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \xrightarrow{\delta^2} G^2$$

точная.

г) Предположим, что $E_2^{p,q} = 0$, если $p > 0$ или $q > 0$; определить точную последовательность, аналогичную указанной в в).

д) Предположим, что существуют такие целые числа r, d, где $d \geqslant r \geqslant 2$, что $E_r^{p,q} = 0$, если $p \neq 0, d$. Определить точную последовательность:

$$\ldots \to E_r^{d,n-d} \to G^n \to E_r^{0,n} \to E_r^{d,n+1-d} \to G^{n+1} \to \ldots$$

Если, аналогично, $E_r^{p,q} = 0$ при $q \neq 0, d$, то показать, что существует точная последовательность

$$\ldots \to E_r^{n,0} \to G^n \to E_r^{n-d,d} \to E_r^{n+1,0} \to \ldots$$

е) Предположим, что $E_2^{p,q} = 0$, если $q \neq 0$ (соответственно $p \neq 0$). Показать, что гомоморфизм $\delta^n\colon E_2^{n,0} \to G^n$ (соответственно $\gamma^n\colon G^n \to E_2^{0,n}$) биективен для всякого n.

¶ 16. Пусть C – комплекс A-модулей, $(F^pC)_{p\in\mathbf{Z}}$ – убывающая последовательность подкомплексов в C.

а) Для $p, q, r \in \mathbf{Z}$ пусть $M_r^{p,q}$ – множество элементов x из $(F^pC)^{p+q}$, для которых $dx \in F^{p+r}C$; при $r \geqslant 0$ положим $E_r^{p,q} = M_r^{p,q}/(d(M_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + M_r^{p+1,q-1})$ и обозначим через $d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ гомоморфизм, получаемый из d переходом к фактормодулям. Показать, что для всякого $r \geqslant 0$ существует изоморфизм $\alpha_r\colon H(E_r) \to E_{r+1}$, так что последовательность $(E_r, d_r)_{r\geqslant 2}$, наделенная отображениями α_r, представляет собою спектральную последовательность. Имеем: $E_0^{p,q} = (F^pC)^{p+q}/(F^{p+1}C)^{p+q}$.

б) Предположим, что $\bigcup_p F^pC = C$ и что для всякого n существует такое целое p, что $(F^pC)^n = 0$. Показать, что спектральная последовательность, определенная в а), сходится (упражнение 14) к градуированному A-модулю H(C), наделенному последовательностью градуированных подмодулей $F^pH(C) = \operatorname{Im} H(i_p)$, где $i_p\colon F^pC \to C$ – каноническое вложение.

в) Если $F^0C = C$, то A-модуль $E_r^{p,q}$ нулевой при $p < 0$; если $(F^pC)^n = 0$ при $p > n$, то $E_r^{p,q} = 0$ при $q < 0$.

г) Пусть C' – второй комплекс, $(F^pC')_{p\in\mathbf{Z}}$ – убывающая последовательность подкомплексов в C', E' – ассоциированная спектральная последовательность. Пусть $u\colon C \to C'$ – морфизм комплексов, при котором $u(F^pC) \subset F^pC'$ для всякого p. Показать, что u индуцирует морфизм спектральных последовательностей $\tilde{u}\colon E \to E'$.

д) В обозначениях из г) пусть $v\colon C \to C'$ – второй морфизм, при котором $v(F^pC) \subset F^pC'$ для всякого p, и пусть h – гомотопия, связывающая u с v. Пусть k – такое целое число $\geqslant 0$, что $h(F^pC) \subset F^{p-k}C'$ для всякого p. Показать, что $\tilde{u}_r = \tilde{v}_r$ при $r > k$.

17. Пусть C – бикомплекс (с. 48 упражнение 11).

а) Определим две убывающие последовательности $({}'F^pC)_{p\in\mathbf{Z}}$ и $({}''F^qC)_{q\in\mathbf{Z}}$ подкомплексов комплекса, ассоциированного с C, положив

$${}'F^pC)^n = \bigoplus_{i\geqslant p} C^{i,n-i}, \quad ({}''F^qC)^n = \bigoplus_{j\geqslant q} C^{n-j,j}.$$

Пусть 'E и ''E – соответствующие спектральные последовательности (упражнение 16, а)). Показать, что для всякой пары (p, q) A-модуль $'E_2^{p,q}$ (соответственно $''E_2^{p,q}$) изоморфен $'H^p({}''H^q(C))$ (соответственно $''H^p({}'H^q(C))$).

б) Предположим, что существует такое целое n, что $C^{p,q} = 0$ при $p \geqslant n$ или при $q \leqslant n$. Показать, что спектральная последовательность 'E сходится к H(C). Если, аналогично, существует целое m, для которого $C^{p,q} = 0$ при $p \leqslant m$ или при $q \geqslant m$, то спектральная последовательность ''E сходится к H(C).

в) Предположим, что $C^{p,q} = 0$ при $p < 0$ или $q < 0$. Показать, что гомоморфизм $\delta^p\colon {}'E_2^{p,0} \to H^p(C)$ (упражнение 15) получается посредством перехода к гомологии из канонического вложения комплексов $''Z^0(C) \to C$. Аналогично, гомоморфизм $''E_2^{0,p} \to H^p(C)$ получается из вложения $'Z^0(C) \to C$.

г) Пусть $\tilde{C}$ – второй бикомплекс, $'\tilde{E}$ и $''\tilde{E}$ – две ассоциированные спектральные последовательности. Показать, что всякий морфизм бикомплексов $u\colon C \to \tilde{C}$ индуцирует морфизм спектральных последовательностей $'u\colon {}'E \to '\tilde{E}$ и $''u\colon {}''E \to ''\tilde{E}$. Показать, что если два морфизма u, v из C в $\tilde{C}$ гомотопны, то ассоциированные морфизмы $'u$ и $'v$ (соответственно $''u$ и $''v$) *равны* (использовать упражнение 16, д)).

18. Пусть E – спектральная последовательность (упражнение 14), в которой A-модуль E_2 имеет конечную длину. Пусть $\mathscr{C}$ – множество классов A-модулей конечной длины; показать, что $\chi_{\mathscr{C}}(E_2) = \chi_{\mathscr{C}}(E_r) = \chi_{\mathscr{C}}(E_\infty)$ для всякого $r \geqslant 2$ (с. 44). Если, кроме того, E сходится к градуированному A-модулю G, то он имеет конечную длину и $\chi_{\mathscr{C}}(G) = \chi_{\mathscr{C}}(E_2)$.

19. *Симплициальной схемой* называется пара $(K, \mathscr{F})$, где K – множество и $\mathscr{F}$ – некоторое множество конечных подмножеств в K, называемых гранями K, причем всякое подмножество грани является гранью и всякая точка из K принадлежит по крайней мере одной грани. *Симплициальным*

отображением симплициальной схемы $(K, \mathscr{F})$ в симплициальную схему $(L, \mathscr{G})$ называется отображение K в L, которое переводит всякую грань K в грань L.

а) Пусть n – целое число $\geqslant 0$; *n-симплексом* симплициальной схемы K называется всякая последовательность $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ элементов из K, в которой все α_i принадлежат одной и той же грани K. Обозначим через $S_n(K, A)$ свободный A-модуль, порожденный n-симплексами при $n \geqslant 0$, и положим $S_n(K, A) = 0$ при $n < 0$. Определим A-гомоморфизм d_n: $S_n(K, A) \to S_{n-1}(K, A)$ положив $d_n = 0$ при $n \leqslant 0$ и $d_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_n)$ для всякого n-симплекса $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ при $n \geqslant 1$ (знак $\wedge$ над буквой обозначает, что она должна быть опущена). Показать, что $d_{n-1} \circ d_n = 0$ для всякого n, так что $(S(K, A), d)$ – комплекс A-модулей. Определим также A-комплекс $C(K, A)$, положив $C^n(K, A) = \mathrm{Hom}\,(S_n(K, Z), A)$, $\delta^n = \mathrm{Hom}\,(d_n, 1_A)$ для всякого n. При $n \geqslant 0$ иногда обозначают через $H_n(K, A)$ (соответственно $H^n(K, A)$) A-модуль $H_n(S(K, A))$ (соответственно $H^n(C(K, A))$).

б) Пусть K, L – две симплициальных схемы, f: $K \to L$ – симплициальное отображение. Показать, что f индуцирует морфизмы комплексов $S(f)$: $S(K, A) \to S(L, A)$ и $C(f)$: $C(L, A) \to C(K, A)$, откуда получаем гомоморфизмы f_*: $H(K, A) \to H(L, A)$ и f^*: $H^*(L, A) \to H^*(K, A)$.

в) Пусть g: $K \to L$ – второе симплициальное отображение. Говорят, что f и g *симплициально гомотопны*, если для всякой грани σ из K множество $f(\sigma) \cup g(\sigma)$ представляет собой грань в L. Показать, что тогда морфизмы $S(f)$ и $S(g)$ (соответственно $C(f)$ и $C(g)$) гомотопны (определить гомотопию h, положив

$$h(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f(\alpha_0), \ldots, f(\alpha_i), g(\alpha_i), \ldots, g(\alpha_n))$$

для всякого n-симплекса $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$).

г) Говорят, что симплициальная схема K *коническая*, если существует такая точка s в K, что для всякой грани σ в K подмножество $\sigma \cup \{s\}$ является гранью. Показать, что тогда существуют гомотопизмы комплексов S(K, A) и C(K, A) на A.

д) Обозначим через D(K, A) градуированный подмодуль в S(K, A), порожденный симплексами $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, в которых две из точек α_i равны, и элементами вида $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) - \epsilon(\sigma) \cdot (\alpha_{\sigma(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$ для всякого n-симплекса $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ и всякой перестановки σ множества $\{0, \ldots, n\}$. Показать, что D(K, A) – подкомплекс в S(K, A) и что отображение перехода к факторкомплексу p: $S(K, A) \to S(K, A)/D(K, A)$ является гомотопизмом (обратный гомотопизм получается выбором линейного порядка на K и сопоставлением классу симплекса $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ по модулю D(K, A) элемента $\epsilon(\sigma) \cdot (\alpha_{\sigma(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$, где σ – перестановка, для которой $\alpha_{\sigma(0)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{\sigma(n)}$, если все α_i различны, и 0 в противном случае).

*20. Пусть R – полное кольцо дискретного нормирования (AC, VI, § 3, n° 6; Коммутативная алгебра, VI, с. 450) с полем вычетов k характеристики $p > 0$. Предположим, что поле частных кольца R имеет характеристику 0. Обозначим через v нормирование кольца R, через $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в R и через R^* – мультипликативную группу единиц в R. Для всякого целого $n \geqslant 0$ пусть $R^*(n)$ – подгруппа R^*, образованная элементами x, для которых $v(x - 1) \geqslant n$.

а) Пусть r – целое число, $r > v(p)/(p - 1)$. Показать, что ряд

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$$

сходится для $x \in \mathfrak{m}^r$ и определяет изоморфизм аддитивной группы $\mathfrak{m}^r$ на группу $R^*(r)$.

б) Предположим, что k – конечное поле из q элементов. Пусть n – целое число $\geqslant 1$, μ_n – подгруппа элементов x из R^*, для которых $x^n = 1$. Показать, что группы μ_n и $R^*/(R^*)^n$ конечны и что

$$\mathrm{Card}\,(R^*/R^{*n})/\mathrm{Card}\,(\mu_n) = q^{v(n)}.$$

(Пусть $\mathscr{C}$ – множество классов конечных Z-модулей, φ: $K(\mathscr{C}) \to Q^*$ – гомоморфизм, при котором

$$\varphi([G]) = \mathrm{Card}\,(G) \text{ для } G \in \mathscr{C},$$

$C^{(r)}$ – комплекс Z-модулей, в котором $C_p^{(r)} = 0$ при $p \neq 0, 1$, $C_0^{(r)} = C_1^{(r)} = R^*(r)$, $d_1(x) = x^n$ для $x \in R^*(r)$. Доказать, что $\chi(H(C^{(r)}))$ не зависит от r; затем использовать а).)

21. Предположим, что кольцо A представляет собой коммутативную алгебру над некоторым коммутативным кольцом k, A-модуль $D_k(A)$ k-дифференцирований кольца A тогда отождествляется с модулем, сопряженным A-модулю $\Omega^1_{A/k}$, что определяет на $\Omega_{A/k}$ структуру левого $\Lambda_A(D_k(A))$-модуля (ср. III, p. 165). Доказать формулу:

$$(X_0 \wedge \ldots \wedge X_p) \lrcorner\, d\omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i((X_0 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p) \lrcorner\, \omega) +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} ([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge \hat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_p) \lrcorner\, \omega,$$

где $\omega \in \Omega^p_{A/k}$, $X_0, \ldots, X_p \in D_k(A)$ и знак $\hat{}$ над буквой обозначает, что она должна быть опущена. (Свести к случаю $p = 1$.)

22. Сохраняются соглашения из предыдущего упражнения; если M – A-модуль, ∇ – связность на M и $X \in D_k(A)$, то обозначим через ∇_X k-эндоморфизм $(1_M \otimes X) \circ \nabla$ модуля M.

а) Пусть M_1, M_2 – два A-модуля, наделенные связностями ${}^1\Delta$, ${}^2\Delta$; показать, что определяется связность на $M_1 \oplus M_2$ (соответственно $M_1 \otimes_A M_2$, соответственно $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$), если положить: $\nabla(m_1 + m_2) = {}^1\nabla(m_1) + {}^2\nabla(m_2)$ для $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ (соответственно $\nabla_X(m_1 \otimes m_2) = {}^1\nabla_X(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes {}^2\nabla_X(m_2)$ для $X \in D_k(A)$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, соответственно $\nabla_X(u) = {}^2\nabla_X \circ u - u \circ {}^1\nabla_X$ для $X \in D_k(A)$, $u \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$).

б) Пусть M – A-модуль, $\nabla\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$ – связность на M. Если $X, Y \in D_k(A)$, то обозначим через $R(X, Y)$ A-эндоморфизм модуля M, при котором $R(X, Y)(m) = \langle R(m), X \wedge Y \rangle$ для всякого $m \in M$. Доказать формулу: $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ (использовать упражнения 21).

в) Предположим, что A-модуль M *проективен*, так что гомоморфизм кривизны R отождествляется с некоторым элементом из $\mathrm{End}_A(M) \otimes_A \Omega^2_{A/k}$. Если наделить $\mathrm{End}_A(M)$ связностью ∇, определенной в а), то показать, что $\nabla^2 R = 0$.

§ 3. РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Сохраняются соглашения из предыдущего параграфа.

1. Продолжение морфизмов комплексов

Лемма 1. *Рассмотрим диаграмму* A-*модулей и гомоморфизмов*:

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & \swarrow{\scriptstyle k} & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow{\scriptstyle k''} & \\ N' & \xrightarrow[\beta']{} & N & \xrightarrow[\beta]{} & N'', \end{array}$$

в которой $f \circ \alpha' = \beta \circ f'$, $\alpha \circ \alpha' = 0$, $\mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,\beta'$ *и* $f = k'' \circ \alpha + \beta \circ k$ *и где модуль* M' *проективен. Существует* A-*гомоморфизм* k': $M' \to N'$, *для которого* $f' = k \circ \alpha' + \beta' \circ k'$.

Действительно, положим $g = f' - k \circ \alpha'$; имеем:

$$\beta \circ g = \beta \circ f' - \beta \circ k \circ \alpha' = f \circ \alpha' - \beta \circ k \circ \alpha' = k'' \circ \alpha \circ \alpha' = 0.$$

Это влечет за собой, что $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(\beta')$. Так как M' проективен, то существует, следовательно, A-гомоморфизм k': $M' \to N'$, для которого $\beta' \circ k' = g$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Если в коммутативной диаграмме* A-*модулей и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u''} \\ N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'' \end{array}$$

выполняются соотношения $\alpha \circ \alpha' = 0$, $\mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,\beta'$ *и если модуль* M' *проективен, то существует* A-*гомоморфизм* u': $M' \to N'$, *для которого* $\beta' \circ u' = u \circ \alpha'$.

Достаточно положить $k'' = u''$, $k = -u$, $f = 0$, $f' = 0$ и $u' = k'$ в лемме 1.

Лемма 1 bis. *Рассмотрим диаграмму* A-*модулей и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' \\ \swarrow{\scriptstyle k'} & \downarrow{\scriptstyle f'} & \swarrow{\scriptstyle k} & \downarrow{\scriptstyle f} & \\ N' & \xrightarrow[\beta']{} & N & \xrightarrow[\beta]{} & N'', \end{array}$$

в которой $f \circ \alpha' = \beta \circ f'$, $\mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Im}\,\alpha'$, $\beta \circ \beta' = 0$ и $f' = k \circ \alpha' + \beta' \circ k'$ *и где модуль* N'' *инъективен. Существует* A-*гомоморфизм* k'': $M'' \to N''$, *для которого* $f = k'' \circ \alpha + \beta \circ k$.

Действительно, положим $g = f - \beta \circ k$, имеем:

$$g \circ \alpha' = f \circ \alpha' - \beta \circ k \circ \alpha' = \beta \circ f' - \beta \circ k \circ \alpha' = \beta \circ \beta' \circ k' = 0.$$

Это влечет за собой, что $\mathrm{Ker} g \supset \mathrm{Im}\alpha' = \mathrm{Ker}\alpha$. Так как N'' инъективен, то существует,

следовательно (с. 19, замечание), A-гомоморфизм k'': $M'' \to N''$, для которого $g = k'' \circ \alpha$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2 bis. *Если в коммутативной диаграмме* A*-модулей и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \\ N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'', \end{array}$$

выполняются соотношения $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im}\alpha'$, $\beta \circ \beta' = 0$ *и если модуль* N'' *инъективен, то существует* A*-гомоморфизм* u'': $M'' \to N''$, *для которого* $u'' \circ \alpha = \beta \circ u$.

Достаточно положить $u' = k'$, $u = -k$, $f = 0$, $f' = 0$ и $k'' = u''$ в лемме 1 bis.

Предложение 1. *Пусть* (P, d_P) *и* (E, d_E) *– два комплекса* A*-модулей и* r *– целое число.*

а) *Пусть* $(u_i: P_i \to E_i)_{i \leqslant r}$ *– семейство гомоморфизмов, для которых* $d_E \circ u_i = u_{i-1} \circ d_P$ *при* $i \leqslant r$. *Предположим, что модуль* P_i *проективен при* $i > r$ *и что* $H_i(E) = 0$ *при* $i \geqslant r$. *Тогда семейство гомоморфизмов* u_i *продолжается до морфизма комплексов из* P *в* E; *два таких продолжения гомотопны.*

б) *Пусть* $(u^i: P^i \to E^i)_{i \leqslant r}$ *– семейство гомоморфизмов, для которых* $u^i \circ d_P = d_E \circ u^{i-1}$ *при* $i \leqslant r$. *Предположим, что модуль* E^i *инъективен при* $i > r$ *и что* $H^i(P) = 0$ *при* $i \geqslant r$. *Тогда семейство гомоморфизмов* u^i *продолжается до морфизма комплексов из* P *в* E; *два таких продолжения гомотопны.*

Докажем а). Существование продолжения v для семейства $(u_i)_{i \leqslant r}$ следует немедленно из леммы 2 по индукции. Пусть v' – другое продолжение. Положим $f = v' - v$ и построим по n гомоморфизм k_n: $P_n \to E_{n+1}$, для которого $f_n = d_E \circ k_n + k_{n-1} \circ d_P$. При $i \leqslant r$ возьмем $k_i = 0$. Пусть $n \geqslant r$, и предположим, что отображения k_i построены при $i \leqslant n$. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{d_P} & P_n & \xrightarrow{d_P} & P_{n-1} \\ {\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle k_n} & \downarrow{\scriptstyle f_n} & \swarrow{\scriptstyle k_{n-1}} & \\ E_{n+2} & \xrightarrow[d_E]{} & E_{n+1} & \xrightarrow[d_E]{} & E_n. \end{array}$$

Предположения леммы 1 в ней удовлетворяются; следовательно, существует A-гомоморфизм k_{n+1}: $P_{n+1} \to E_{n+2}$, для которого $f_{n+1} = d_E \circ k_{n+1} + k_n \circ d_P$, откуда получаем утверждение а).

Доказательство б) производится аналогично посредством лемм 1 bis и 2 bis.

2. Резольвенты

В последующем мы всегда отождествляем модуль с комплексом, для которого он служит компонентой степени нуль, а все другие компоненты которого равны нулю.

Определение 1. Пусть M – A-модуль. *Левой резольвентой* для M называется пара (P, p), где P – комплекс, нулевой справа, и p: $P \to M$ – гомологизм. *Правой резольвентой* для M называется пара (e, E), где E – комплекс, нулевой слева, и e: $M \to E$ – гомологизм.

Длиной резольвенты (P, p) (соответственно (e, E)) называется длина комплекса P (соответственно E). Если (P, p) и (P', p') (соответственно (e, E) и (e', E')) – две левые (соответственно правые) резольвенты для M, то морфизм комплексов f: $P \to P'$, для которого $p' \circ f = p$ (соответственно g: $E \to E'$, для которого $g \circ e = e'$), называется морфизмом резольвент.

Предложение 2. *Пусть* P *– комплекс, нулевой справа, и* p: $P \to M$ *– морфизм. Для того чтобы пара* (P, p) *была левой резольвентой для* M, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность*

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{d_P} P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_P} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0 \qquad (1)$$

была точной.

Действительно, высказывание, что p: $P \to M$ – гомологизм, означает, что $H_i(P) = 0$ при $i > 0$ и что p_0 индуцирует изоморфизм модуля $\operatorname{Coker}(d_P: P_1 \to P_0)$ на M.

Точно так же:

Предложение 2bis. *Пусть* E – *комплекс, нулевой слева,* $e: M \to E$ – *морфизм. Для того чтобы пара* (e, E) *была правой резольвентой для* M, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность*

$$0 \to M \xrightarrow{e_0} E^0 \xrightarrow{d_E} E^1 \to \ldots \to E^n \xrightarrow{d_E} E^{n+1} \to \ldots \qquad (1\,\text{bis})$$

была точной.

Злоупотребляя языком, часто говорят, что последовательность (1) (соответственно (1 bis)) представляет собой левую (соответственно правую) резольвенту для M.

Определение 2. *Проективной* (соответственно *свободной, плоской*) *резольвентой* A-модуля M называется такая левая резольвента (P, p) для M, что комплекс P проективный (соответственно свободный, плоский) (с. 31). *Инъективной резольвентой* для M называется такая правая резольвента (e, E) для M, что комплекс E инъективный.

Примеры. 1. Предположим, что A – кольцо главных идеалов; пусть M – A-модуль и $(x_i)_{i \in I}$ – некоторое порождающее семейство для M. Обозначим через L_0 свободный модуль $A^{(I)}$, через $(e_i)_{i \in I}$ – его канонический базис и определим $p: L_0 \to M$, положив $p(e_i) = x_i$. Гомоморфизм p сюръективен и его ядро L_1 является свободным A-модулем согласно VII, § 3, cor. 2 au th. 1 (Алгебра, VII, с. 43, теорема 1), следовательно, точная последовательность

$$0 \to L_1 \to L_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

представляет собой свободную резольвенту для M длины 1. Если I конечно, то L_0 и L_1 имеют конечный тип.

2. Предположим, что кольцо A коммутативно; пусть E – A-модуль и u – некоторый эндоморфизм E. Обозначим через E_u $A[X]$-модуль, который получается, если E наделить соответствующей структурой по правилу

$$(p, x) \mapsto p(u) \quad \text{для} \quad p \in A[X] \quad \text{и} \quad x \in E.$$

Согласно III, p. 106, имеет место точная последовательность:

$$0 \to A[X] \otimes_A E \xrightarrow{\psi} A[X] \otimes_A E \xrightarrow{\varphi} E_u \to 0,$$

где $\varphi(p \otimes x) = px$ и $\psi(p \otimes x) = Xp \otimes x - p \otimes u(x)$ для $p \in A[X]$ и $x \in E$. Эта точная последовательность представляет собой резольвенту длины 1 для модуля E_u, которая свободна (соответственно проективна, соответственно конечного типа [1])), если E – свободный A-модуль (соответственно проективный, соответственно конечного типа).

3. Если A – кольцо главных идеалов, то точная последовательность

$$0 \to A \to K \to K/A \to 0$$

представляет собой инъективную резольвенту длины 1 для A-модуля A_s (с. 21, пример 1).

Предложение 3. *Пусть* $f: M' \to M$ – *гомоморфизм A-модулей,* $p': P' \to M'$ – *морфизм в* M' *нулевого справа проективного комплекса* P' *и* $p: P \to M$ – *левая резольвента для* M. *Существует, и притом единственный с точностью до гомотопии, морфизм комплексов* $\tilde{f}: P' \to P$, *для которого* $p \circ \tilde{f} = f \circ p'$.

Рассмотрим комплекс $\overline{P}$, определяемый следующим образом: $\overline{P}_n = P_n$ при $n \neq -1$, $\overline{P}_{-1} = M$, $d_{\overline{P},n} = d_{P,n}$ при $n \neq 0, -1$, $d_{\overline{P},0} = p_0$, $d_{\overline{P},-1} = 0$, и комплекс $\overline{P}'$, определяемый аналогичным образом. Применяя к комплексам $\overline{P}$ и $\overline{P}'$ предложение 1, а), с $r = 0$, $u_i = 0$ при $i < -1$ и $u_{-1} = f$, получим утверждение предложения 3.

Следствие. *Пусть* (P, p) *и* (P', p') – *две проективных резольвенты для* M. *Существует, и притом единственный с точностью до гомотопии, гомотопизм* $\alpha: P' \to P$, *для которого* $p \circ \alpha = p'$.

Действительно, существует морфизм $\alpha: P' \to P$ (соответственно $\beta: P \to P'$), для которого $p \circ \alpha = p'$ (соответственно $p' \circ \beta = p$). Так как $p \circ \alpha \circ \beta = p$ (соответственно

---

[1]) Говорят, что левая резольвента (P, p) имеет конечный тип, если все компоненты комплекса P являются модулями конечного типа. – *Примеч. пер.*

$p' \circ \beta \circ \alpha = p'$), то морфизм $\alpha \circ \beta$ гомотопен 1_P (соответственно морфизм $\beta \circ \alpha$ гомотопен $1_{P'}$).

Предложение 3bis. *Пусть* $g: N \to N'$ – *гомоморфизм* A-*модулей*, $e': N' \to E'$ – *морфизм из* N' *в нулевой слева инъективный комплекс* E' *и* $e: N \to E$ – *правая резольвента для* N. *Существует и притом единственный с точностью до гомотопии, морфизм комплексов* $\tilde{g}: E \to E'$, *для которого* $\tilde{g} \circ e = e' \circ g$.

Это доказывается так же, как предложение 3, с помощью предложения 1, б).

Следствие. *Пусть* (e, E) *и* (e', E') – *две инъективных резольвенты для* M. *Существует, и притом единственный с точностью до гомотопии, гомотопизм* $\alpha: E \to E'$, *для которого* $\alpha \circ e = e'$.

3. Каноническая свободная резольвента

Для всякого A-модуля M обозначим через $L_0(M)$ свободный A-модуль $A^{(M)}$ с базисом M, $(e_m)_{m \in M}$ – его канонический базис и $p_M: L_0(M) \to M$ – гомоморфизм, при котором

$$p_M(e_m) = m, \quad m \in M.$$

Положим $Z_0(M) = \operatorname{Ker} p_M$, и пусть $i_M: Z_0(M) \to L_0(M)$ – каноническое вложение. Имеем точную последовательность

$$0 \to Z_0(M) \xrightarrow{i_M} L_0(M) \xrightarrow{p_M} M \to 0. \tag{1}$$

Определим градуированный модуль $L(M)$, положив $L_n(M) = 0$ при $n < 0$ и, индукцией по $n > 0$,

$$L_n(M) = L_0(Z_{n-1}(M)), \quad Z_n = Z_0(Z_{n-1}(M)). \tag{2}$$

Определим A-гомоморфизмы $d_n^M: L_n(M) \to L_{n-1}(M)$:

$$\begin{aligned} d_n^M &= 0, && n \leqslant 0, \\ d_1^M &= i_M \circ p_{Z_0(M)}, && \\ d_n^M &= i_{Z_{n-2}(M)} \circ p_{Z_{n-1}(M)}, && n > 1. \end{aligned} \tag{3}$$

По построению, имеем точную последовательность

$$\to L_n(M) \xrightarrow{d_n^M} L_{n-1}(M) \to \ldots \to L_0(M) \xrightarrow{p_M} M \to 0,$$

так что, если распространить p_M до морфизма комплексов

$$p_M: (L(M), d^M) \to M,$$

то получим свободную резольвенту для M, называемую *канонической свободной резольвентой* для M.

Пусть $f: M \to N$ – гомоморфизм A-модулей. Обозначим через

$$L_0(f): L_0(M) \to L_0(N)$$

единственный A-гомоморфизм, при котором $L_0(f)(e_m) = e_{f(m)}$ для всякого $m \in M$. Имеем:

$$p_N \circ L_0(f) = f \circ p_M. \tag{4}$$

Следовательно, $L_0(f)$ индуцирует A-гомоморфизм $Z_0(f): Z_0(M) \to Z_0(N)$, и имеем:

$$i_N \circ Z_0(f) = L_0(f) \circ i_M. \tag{5}$$

Положим $L_n(f) = 0$ при $n < 0$ и определим индукцией по $n > 0$ гомоморфизмы $L_n(f): L_n(M) \to L_n(N)$ и $Z_n(f): Z_n(M) \to Z_n(N)$, положив:

$$L_n(f) = L_0(Z_{n-1}(f)), \quad Z_n(f) = Z_0(Z_{n-1}(f)). \tag{6}$$

Предложение 4. $L(f): L(M) \to L(N)$ – *морфизм комплексов* A-*модулей, для которого* $p_M \circ L(f) = f \circ p_N$.

Нужно доказать для всякого $n>0$ формулу

$d_n^N \circ L_n(f) = L_{n-1}(f) \circ d_n^M$.

Имеем сначала:

$$\begin{aligned} d_1^N \circ L_1(f) &= i_N \circ p_{Z_0(N)} \circ L_0(Z_0(f)) && \text{(согласно (3) и (6))} \\ &= i_N \circ Z_0(f) \circ p_{Z_0(M)} && \text{(согласно (4))} \\ &= L_0(f) \circ i_M \circ p_{Z_0(M)} && \text{(согласно (5))} \\ &= L_0(f) \circ d_1^M && \text{(согласно (3))}. \end{aligned}$$

Когда $n>1$, имеем последовательно:

$$\begin{aligned} d_n^N \circ L_n(f) &= i_{Z_{n-2}(N)} \circ p_{Z_{n-1}(N)} \circ L_0(Z_{n-1}(f)) && \text{(согласно (3) и (6))} \\ &= i_{Z_{n-2}(N)} \circ Z_{n-1}(f) \circ p_{Z_{n-1}(M)} && \text{(согласно (4))} \\ &= i_{Z_{n-2}(N)} \circ Z_0(Z_{n-2}(f) \circ p_{Z_{n-1}(M)} && \text{(согласно (6))} \\ &= L_0(Z_{n-2}(f)) \circ i_{Z_{n-2}(M)} \circ p_{Z_{n-1}(M)} && \text{(согласно (5))} \\ &= L_{n-1}(f) \circ d_n^M && \text{(согласно (3) и (6))}. \end{aligned}$$

Очевидно, имеем:

$$L(1_M) = 1_{L(M)}. \tag{7}$$

С другой стороны, если g: $N \to P$ – гомоморфизм A-модулей, то

$$L(g \circ f) = L(g) \circ L(f). \tag{8}$$

Действительно, для всякого $m \in M$ имеем:

$$L_0(g \circ f)(e_m) = e_{g \circ f(m)} = L_0(g)(e_{f(m)}) = L_0(g) \circ L_0(f)(e_m),$$

следовательно, $L_0(g \circ f) = L_0(g) \circ L_0(f)$; следовательно, $Z_0(g \circ f) = Z_0(g) \circ Z_0(f)$; отсюда индукцией по n тотчас получаем, что $L_n(g \circ f) = L_n(g) \circ L_n(f)$ для всякого $n \geqslant 0$, что и требовалось.

Замечание. Если f, $g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, то равенство $L(f+g) = L(f) + L(g)$ не имеет места. Однако эти два морфизма *гомотопны* согласно предложению 3, с. 55.

Пусть M – правый A-модуль; обозначим через A° кольцо, противоположное A, через M° – A°-модуль, определяемый A-модулем M, через $L(M^\circ)$ – его каноническую свободную резольвенту. A-комплекс $L(M^\circ)^\circ$, определяемый A°-комплексом $L(M^\circ)$, обозначается через $L(M)$ и называется канонической свободной резольвентой для M. Имеем, следовательно:

$$L(M^\circ) = L(M)^\circ.$$

4. Каноническая инъективная резольвента

Пусть F – A-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; для всякого A-модуля M положим $I^0(M) = F^{\mathrm{Hom}_A(M, F)}$ и обозначим через e_M: $M \to I^0(M)$ гомоморфизм, который элементу $m \in M$ сопоставляет семейство $(\varphi(m))_{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, F)}$. Согласно следствию 2, с. 22, $I^0(M)$ – инъективный A-модуль и отображение e_M инъективно. Положим $K^0(M) = \mathrm{Coker}\, e_M$ и обозначим через q_M: $I^0(M) \to K^0(M)$ каноническую проекцию. Имеем, таким образом, точную последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{e_M} I^0(M) \xrightarrow{q_M} K^0(M) \to 0.$$

Определим градуированный A-модуль $I(M)$, положив $I^n(M) = 0$ при $n<0$ и, индукцией по $n>0$,

$$I^n(M) = I^0(K^{n-1}(M)), \quad K^n(M) = K^0(K^{n-1}(M)). \tag{9}$$

Определим A-гомоморфизмы $\delta_M^n : I^n(M) \to I^{n+1}(M)$:

$$\delta_M^n = 0, \qquad n < 0,$$

$$\delta_M^0 = e_{K^0(M)} \circ q_M, \tag{10}$$

$$\delta_M^n = e_{K^n(M)} \circ q_{K^{n-1}(M)}, \quad n > 0$$

По построению, имеем точную последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{e_M} I^0(M) \xrightarrow{\delta_M^0} \ldots \to I^n(M) \xrightarrow{\delta_M^n} I^{n+1}(M) \to \ldots,$$

так что если распространить e_M до морфизма комплексов

$$e_M : M \to (I(M), \delta_M),$$

то получим инъективную резольвенту для M, называемую *канонической инъективной резольвентой* для M.

Пусть f: $M \to N$ – гомоморфизм A-модулей. Обозначим через $I^0(f)$ гомоморфизм из $I^0(M) = F^{\mathrm{Hom}_A(M,F)}$ в $I^0(N) = F^{\mathrm{Hom}_A(N,F)}$, который отображает семейство $(x_\varphi)_{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,F)}$ на семейство $(x_{\psi \circ f})_{\psi \in \mathrm{Hom}_A(N,F)}$. Имеем

$$I^0(f) \circ e_M = e_N \circ f. \tag{11}$$

Следовательно, $I^0(f)$ индуцирует гомоморфизм $K^0(f)$: $K^0(M) \to K^0(N)$, и имеем:

$$K^0(f) \circ q_M = q_N \circ K^0(f). \tag{12}$$

Положим $I^n(f) = 0$ при $n < 0$ и определим индукцией по $n > 0$ гомоморфизмы $I^n(f)$: $I^n(M) \to I^n(N)$ и $K^n(f)$: $K^n(M) \to K^n(N)$, положив:

$$I^n(f) = I^0(K^{n-1}(f)), \quad K^n(f) = K^0(K^{n-1}(f)). \tag{13}$$

Предложение 5. $I(f)$: $I(M) \to I(N)$ – *морфизм комплексов* A-*модулей, для которого* $I(f) \circ e_M = e_N \circ f$.

Это доказывается аналогично предложению 4.

Имеем:

$$I(1_M) = 1_{I(M)} \tag{14}$$

и для всякого гомоморфизма A-модулей g: $N \to P$

$$I(g \circ f) = I(g) \circ I(f). \tag{15}$$

Замечание. Если $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, то равенство $I(f+g) = I(f) + I(g)$ не имеет места. Однако эти два морфизма гомотопны согласно предложению 3 bis, с. 56.

Если M – правый A-модуль, то положим $I(M) = I(M^\circ)^\circ$; эту резольвенту называют канонической инъективной резольвентой для M, при этом имеем

$$I(M^\circ) = I(M)^\circ$$

5. Резольвенты конечного типа

Из двух предыдущих пунктов следует, в частности, что всякий A-модуль обладает инъективными резольвентами, свободными резольвентами (следовательно, также проективными или плоскими резольвентами). В некоторых случаях можно сделать дальнейшие уточнения.

Предположим, что кольцо A нётерово слева, и пусть M – A-модуль конечного типа. Построим по индукции последовательности $(L_n)_{n \geqslant 0}$, $(Z_n)_{n \geqslant 0}$, $(d_n)_{n \geqslant 1}$, где для всякого $n \geqslant 0$ L_n – свободный A-модуль конечного типа, Z_n – подмодуль в L_n и d_{n+1}: $L_{n+1} \to L_n$ – гомоморфизм. Для этого выберем конечное порождающее семейство $(m_t)_{t \in I_0}$ для M, положим $L_0 = A^{(I_0)}$, определим p: $L_0 \to M$, положив $p(e_t) = m_t$, и положим $Z_0 = \mathrm{Ker}(p)$. Если для $n \geqslant 0$ модули L_n и Z_n уже построены, то Z_n имеет

конечный тип, так как содержится в L_n; выберем конечное порождающее семейство $(x_{n,i})_{i\in I_{n+1}}$ для Z_n, положим $L_{n+1} = A^{(I_{n+1})}$, определим d_{n+1}, задав $d_{n+1}(e_i) = x_{n,i}$ и положим $Z_{n+1} = \mathrm{Ker}\,(d_{n+1})$.

По построению, имеем точную последовательность

$$\ldots \to L_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} L_n \to \ldots \to L_0 \xrightarrow{p} M \to 0,$$

откуда:

Предложение 6. *Когда кольцо* A *нётерово слева, всякий* A*-модуль конечного типа* M *обладает свободной резольвентой* p: $L \to M$, *в которой* L_n *– модуль конечного типа для всякого* n.

Более общо:

Предложение 7. *Пусть* C *–* A*-комплекс, и пусть число* $a \in \mathbf{Z}$ *таково, что* $H_n(C) = 0$ *при* $n < a$.

а) *Существуют свободный* A*-комплекс* L, *в котором* $L_n = 0$ *при* $n < a$, *и гомологизм* f: $L \to C$.

б) *Предположим, что* A *нётерово слева и что* A*-модули* $H_n(C)$, $n \in \mathbf{Z}$, *конечного типа. Существуют свободный* A*-комплекс* L, *в котором* $L_n = 0$ *при* $n < a$ *и* L_n *–* A*-модуль конечного типа для всякого* n, *и гомологизм* f: $L \to C$.

Пусть C' – подкомплекс в C, в котором $C'_n = C_n$ при $n > a$, $C'_a = Z_a(C)$, $C'_n = 0$ при $n < a$; тогда каноническое вложение C' в C – гомологизм. Заменив C на C', можно, следовательно, предполагать, что $C_n = 0$ при $n < a$. Утверждение следует тогда из повторного применения следующей леммы для $r = a, a+1, \ldots$:

Лемма 3. *Пусть* C *– комплекс и* $r \in \mathbf{Z}$. *Существуют комплекс* C' *и гомологизм* f: $C' \to C$, *для которых* f_n: $C'_n \to C_n$ *– изоморфизм при* $n < r$ *и* C'_r *– свободный* A*-модуль. Если* A *нётерово и* A*-модули* $H_r(C)$ *и* C_{r-1} *конечного типа, то можно потребовать, чтобы модуль* C'_r *был конечного типа.*

а) Пусть сначала h: $M \to C_r$ – гомоморфизм A-модулей; обозначим через $d = (d_n)$ дифференциал в C. Пусть N – подмодуль в $M \times C_{r+1}$, образованный парами (m, x), для которых $h(m) = d_{r+1}(x)$; определим комплекс (C', d'), положив $C'_n = C_n$ при $n \neq r$, $r+1$, $C'_r = M$, $C'_{r+1} = N$, $d'_n = d_n$ при $n \neq r$, $r+1$, $r+2$, $d'_r = d_r \circ h$, $d'_{r+1}(m, x) = m$ для $(m, x) \in N$ и $d'_{r+2}(y) = (0, d_{r+2}(y))$ для $y \in C_{r+2}$. Рассмотрим также морфизм комплексов f: $C' \to C$, для которого $f_n = 1_{C_n}$ при $n \neq r, r+1$, $f_r = h$, $f_{r+1}(m, x) = x$.

б) Комплекс $\mathrm{Ker}\, f$ нулевой и степени $\neq r, r+1$ и дифференциал d'_{r+1} индуцирует изоморфизм $\mathrm{Ker}\, f_{r+1}$ на $\mathrm{Ker}\, f_r$ следовательно, $H(\mathrm{Ker}\, f) = 0$.

в) Когда композиция $M \xrightarrow{h} C_r \to C_r/B_r(C)$ сюръективна, мы видим также, что $H(\mathrm{Coker}\, f) = 0$, и f в этом случае – гомологизм (с. 36, следствие 2).

г) Когда A предполагается нётеровым и A-модули $H_r(C)$ и C_{r-1} конечного типа, тогда модуль $C_r/B_r(C)$ конечного типа, ввиду точной последовательности (с. 31)

$$0 \to H_r(C) \to C_r/B_r(C) \to C_{r-1};$$

в этом случае существуют свободный A-модуль конечного типа M и гомоморфизм h: $M \to C_r$, для которых условие из в) выполняется; в общем случае существуют свободный модуль M и сюръективный гомоморфизм h: $M \to C_r$. Это завершает доказательство.

6. Минимальные проективные резольвенты

Пусть M – A-модуль и пусть

$$(P) \quad \ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

– резольвента для M. Говорят, что (P) – *минимальная проективная резольвента*, если

для всякого $n \geqslant 0$ гомоморфизм δ_n: $P_n \to \mathrm{Im}(d_n)$, индуцируемый d_n, является проективным накрытием (VIII, § 8, n° 5).

Предложение 8. *Пусть* M – A-*модуль*, P *и* P′ – *две минимальные проективные резольвенты для* M *и* f: P → P′ – *морфизм резольвент. Тогда* f – *изоморфизм. В частности, две минимальные проективные резольвенты для* M *изоморфны.*

Положим $\widetilde{P}_n = P_n$ при $n \neq -1$ и $\widetilde{P}_{-1} = M$; определим аналогично $\widetilde{P}'_n$ и положим $f_{-1} = 1_M$. Покажем по индукции, начиная с -1, что f_n: $\widetilde{P}_n \to \widetilde{P}'_n$ – изоморфизм для всякого n. Это очевидно для $n = -1$; предположим, что f_n и f_{n-1} – изоморфизмы. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ P'_n & \xrightarrow{d'_n} & P'_{n-1} \end{array}$$

следует, что f_n индуцирует изоморфизм g_n из $\mathrm{Ker}\, d_n$ на $\mathrm{Ker}\, d'_n$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \mathrm{Ker}\, d_n \\ \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} \\ P'_{n+1} & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & \mathrm{Ker}\, d'_n \end{array}$$

и из VIII, § 8, n° 5, следует, что f_{n+1} – изоморфизм.

Следствие. *Пусть* M – A-*модуль*, P *и* P′ – *две проективные резольвенты для* M; *предположим, что* P *минимальна. Пусть* f: P → P′ *и* g: P′ → P – *два морфизма резольвент. Тогда* f *инъективен,* g *сюръективен и* P′ – *прямая сумма подкомплексов* $\mathrm{Im} f$ *и* $\mathrm{Ker}\, g$. *Кроме того,* $\mathrm{Ker}\, g$ *имеет нулевую гомологию.*

Действительно, $\alpha = g \circ f$ – автоморфизм P (предложение 8). Положим $\widetilde{f} = f \circ \alpha^{-1}$. Имеем:

$$\mathrm{Im}\, \widetilde{f} = \mathrm{Im} f \quad \text{и} \quad g \circ \widetilde{f} = 1_P;$$

это показывает, что $P' = \mathrm{Im}\widetilde{f} \oplus \mathrm{Ker} g$. Так как последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker} g \to P' \xrightarrow{g} P \to 0$$

точная и g – гомологизм, то $\mathrm{Ker} g$ имеет нулевую гомологию.

Предложение 9. *Пусть* M – A-*модуль и* (P, p) – *проективная резольвента для* M. *Обозначим через* $\mathfrak{r}$ *радикал кольца* A. *Предположим, что* P_n – A-*модуль конечного типа для всякого* n *или что* $\mathfrak{r}$ *нильпотентен. Тогда для того чтобы резольвента* (P, p) *была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы комплекс* $(A/\mathfrak{r}) \otimes_A P$ *имел нулевой дифференциал, иначе говоря, чтобы*

$d_{n+1}(P_{n+1}) \subset \mathfrak{r} P_n$ *для всякого* $n \geqslant 0$.

Предположим, что резольвента (P, p) минимальная. Согласно VIII, § 8, n° 5, гомоморфизм

$$1 \otimes \delta_n\colon\ (A/\mathfrak{r}) \otimes_A P_n \to (A/\mathfrak{r}) \otimes_A \mathrm{Im}\, d_n$$

является изоморфизмом. Из точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Im}\, d_{n+1} \xrightarrow{j_n} P_n \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Im}\, d_n \to 0$$

тогда следует, что гомоморфизм $1 \otimes j_n$: $(A/\mathfrak{r}) \otimes_A \mathrm{Im}\, d_{n+1} \to (A/\mathfrak{r}) \otimes_A P_n$ нулевой; так как $d_{n+1} = j_n \circ \delta_{n+1}$, то отсюда выводим, что $1_{A/\mathfrak{r}} \otimes d_{n+1} = 0$ для всякого $n \geqslant 0$.

Обратно, предположим, что для всякого $n \geqslant 1$ гомоморфизм $1_{A/\mathfrak{r}} \otimes d_n$ нулевой, иначе говоря, что $\mathrm{Im}\, d_n = \mathrm{Ker}\, d_{n-1}$ содержится в $\mathfrak{r} P_{n-1}$. Так как гомоморфизм δ_{n-1} сюръективен, то из VIII, § 8, n° 5, следует, что δ_{n-1} – проективное накрытие при $n \geqslant 1$, следовательно, что резольвента (P, p) минимальна.

Предложение 10. *Предположим, что* A – *нётерово слева локальное кольцо, и пусть* M – A-*модуль конечного типа. Тогда* M *обладает минимальной резольвентой* (P, p); *в ней* P_n – *свободный модуль конечного типа для всякого* $n \geqslant 0$.

Действительно, в построении, сделанном в п.5 (с. 58), можно, ввиду VIII, § 8, n°5, взять в качестве (L_0, p) проективное накрытие M и в качестве L_{n+1} – проективное накрытие $\operatorname{Ker} d_n$. Тогда полученная резольвента минимальна.

Замечания 1. Обозначим через $\mathfrak{m}$ максимальный идеал кольца A и положим $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть P – минимальная проективная резольвента для M, и положим $b_n = \dim_k (k \otimes_A P_n)$. Тогда P_n – свободный A-модуль ранга b_n. Из следствия предложения 8 вытекает, что для всякой другой проективной резольвенты P' модуля M выполняются соотношения $\dim_k (k \otimes P'_n) \geqslant b_n$ и что равенство имеет место, если и только если резольвента P' минимальна.

2. Согласно предложению 9, b_n есть размерность над k векторного пространства $H_n(k \otimes_A P)$, *иначе говоря, пространства $\operatorname{Tor}_n^A(k, M)$. Это также размерность над k пространства $\operatorname{Ext}_A^n(M, k)$ (ср. с. 105, пример 3).*

7. Градуированные резольвенты

В этом пункте предполагается, что кольцо A наделено *градуировкой* $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, для которой $A_n = 0$ при $n < 0$. Говорят, что градуированный A-модуль M *ограничен снизу,* если $M_n = 0$ для достаточно малого n; всякий градуированный A-модуль конечного типа ограничен снизу.

Предложение 11. *Если* M – *граудированный* A-*модуль, ограниченный снизу* (*соответственно если* M – *градуированный* A-*модуль конечного типа и если кольцо* A *нётерово слева*), *то существует неограниченная слева точная последовательность градуированных* A-*модулей*

$$\ldots \to L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0,$$

в которой L_i – *ограниченные снизу свободные градуированные модули* (*соответственно свободные градуированные модули конечного типа*) *и* d_i – *градуированные гомоморфизмы степени* 0.

Если N – градуированный A-модуль, ограниченный снизу (соответственно конечного типа над нётеровым A), то существуют свободный градуированный A-модуль, ограниченный снизу (соответственного конечного типа) L и сюръективный градуированный гомоморфизм $L \to N$ (II, p. 167, remarque 3). Приняв это во внимание, предположим, что задана точная последовательность градуированных A-модулей и градуированных гомоморфизмов степени 0:

$$L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0,$$

в которой L_i, $i = 0, \ldots, n$, – ограниченные снизу свободные градуированные модули (соответственно свободные градуированные модули конечного типа). Тогда модуль $N = \operatorname{Ker} d$ ограничен снизу (соответственно конечного типа); следовательно, существуют ограниченный снизу свободный градуированный (соответственно свободный градуированный и конечного типа) A-модуль L_{n+1} и градуированный гомоморфизм d_{n+1}: $L_{n+1} \to L_n$ степени 0, для которого $\operatorname{Im} d_{n+1} = N$; тогда последовательность

$$L_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

точная. Теперь утверждение следует из предыдущего индукцией по n.

8. Стандартная резольвента

В этом пункте мы предполагаем, что кольцо A представляет собой алгебру (ассоциативную и унитарную) над некоторым коммутативным кольцом k. Для $n \geqslant 0$ обозначим через B_n тензорное произведение над k $(n+2)$-модулей, равных A. Оно рассматривается как (A, A)-бимодуль, наделенный структурой левого (соответственно пра-

вого) A-модуля, получаемой из структуры левого (соответственно правого) A-модуля первого (соответственно последнего) множителя тензорного произведения.

При $n \geqslant 1$ определим гомоморфизмы бимодулей d_n^i (для $0 \leqslant i \leqslant n$) и d_n из B_n в B_{n-1} по формулам:

$$d_n^i(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i.$$

Ясно, что

$$d_{n-1}^i \circ d_n^j = d_{n-1}^{j-1} \circ d_n^i \quad \text{при} \quad i < j,$$

и, следовательно,

$$d_{n-1} \circ d_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j} d_{n-1}^i \circ d_n^j + \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n-1} (-1)^{i+j} d_{n-1}^i \circ d_n^j = 0.$$

Таким образом, если положить $B_n = 0$ при $n < 0$ и $d_n = 0$ при $n \leqslant 0$, то последовательность (B_n, d_n) определяет комплекс (A, A)-бимодулей (с. 45), который будет обозначаться через B(A). Для всякого левого A-модуля M обозначим через B(A, M) комплекс, образованный из тензорных произведений $B_n \otimes_A M$ и гомоморфизмов $d_n \otimes 1_M$, *иначе говоря, тензорное произведение комплексов $B(A) \otimes_A M_*$; это комплекс левых A-модулей.

Определим A-линейное отображение ϵ_M из $B_0(A, M) = (A \otimes_k A) \otimes_A M$ в M по формуле $\epsilon_M(a \otimes b \otimes m) = abm$ для $a, b \in A$, $m \in M$. Имеем: $\epsilon_M \circ d_1 = 0$, так что градуированный гомоморфизм $\overline{\epsilon}_M$: $B(A, M) \to M$, совпадающий с ϵ_M в степени 0, представляет собою морфизм комплексов A-модулей.

Предложение 12. *Отображение* $\overline{\epsilon}_M$: $B(A, M) \to M$ *является гомотопизмом комплексов k-модулей. В частности, комплекс* B(A, M) *расщепляем над k и* $(B(A, M), \overline{\epsilon}_M)$ *представляет собой левую резольвенту* A*-модуля* M.

При $n \geqslant 0$ определим k-линейное отображение s_n: $B_n \to B_{n+1}$ по формуле

$$s_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = 1 \otimes x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \quad \text{для} \quad x_0, \ldots, x_{n+1} \in A.$$

Это гомоморфизм правых A-модулей, который удовлетворяет тождествам:

$$d_{n+1}^i \circ s_n = s_{n-1} \circ d_n^{i-1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1,$$

$$d_{n+1}^0 \circ s_n = 1_{B_n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1,$$

и, следовательно, имеем:

$$d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = 1_{B_n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1. \tag{16}$$

Кроме того, имеем:

$$d_1 \circ s_0(x_0 \otimes x_1) = x_0 \otimes x_1 - 1 \otimes x_0 x_1 \quad \text{для} \quad x_0, x_1 \in A. \tag{17}$$

Обозначим через η: $A \to A \otimes_k A$ отображение, определяемое по формуле: $\eta(a) = 1 \otimes a$, и через $\overline{\eta}$: $A \to B(A)$ — морфизм комплексов, совпадающий с η в степени 0. Ясно, что $\overline{\epsilon}_A \circ \overline{\eta} = 1_A$; формулы (16) и (17) показывают, что $d \circ s + 1 \circ d = 1_{B(A)} - \overline{\eta} \circ \overline{\epsilon}_A$. Полагая $\overline{\eta}_M = \overline{\eta} \otimes 1_M$, $d_M = d \otimes 1_M$ и $s_M = s \otimes 1_M$, отсюда выводим, что $\overline{\epsilon}_M \circ \overline{\eta}_M = 1_M$ и $d_M \circ s_M + s_M \circ d_M = 1_{B(A,M)} - \overline{\eta}_M \circ \overline{\epsilon}_M$. Иначе говоря (с. 38, определение 5), $\overline{\epsilon}_M$ есть гомотопизм комплексов k-модулей. Другие утверждения предложения из этого немедленно выводятся.

Определение 3. Левая резольвента $(B(A, M), \overline{\epsilon}_M)$ для M называется *стандартной резольвентой* A-модуля M.

Если A и M — проективные (соответственно свободные, плоские) k-модули, то стандартная резольвента B(A, M) представляет собой проективную (соответственно свободную, плоскую) резольвенту для M.

9. Резольвенты и группы Гротендика

Если $\mathscr{C}$ – некоторое множество классов A-модулей, то будем говорить, что левая резольвента (P, p) ограниченная типа $\mathscr{C}$, если комплекс P ограниченный типа $\mathscr{C}$ (с. 43).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}$ – два аддитивных и точных слева множества классов A-модулей, для которых $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ и всякий A-модуль типа $\mathscr{C}$ обладает ограниченной левой резольвентой типа $\mathscr{C}$. Тогда гомоморфизм α: $K(\mathscr{C}_0) \to K(\mathscr{C})$, получаемый из вложения $\mathscr{C}_0$ в $\mathscr{C}$, биективен; если M – A-модуль типа $\mathscr{C}$ и P – ограниченная левая резольвента для M типа $\mathscr{C}_0$, то $\alpha^{-1}([M]_{\mathscr{C}}) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P)$* (с. 44, пример 6).

Лемма 6. *Пусть f: $M' \to M$ – гомоморфизм A-модулей типа $\mathscr{C}$ и p: $P \to M$ – ограниченная левая резольвента для M типа $\mathscr{C}_0$. Существуют ограниченная левая резольвента p': $P' \to M'$ типа $\mathscr{C}_0$ и морфизм комплексов u: $P' \to P$, для которого $p \circ u = f \circ p'$.*

Рассуждаем индукцией по длине n резольвенты P, причем утверждение тривиально, когда последняя < 0. Рассмотрим отображение g: $M' \times P_0 \to M$, при котором

$$g(x, y) = f(x) - p_0(y) \quad \text{для} \quad x \in M', \ y \in P_0,$$

и его ядро K; A-модуль K имеет тип $\mathscr{C}$, так как g сюръективно и $M' \times P_0$ и M – модули типа $\mathscr{C}$. Пусть h: $P_0' \to K$ – сюръективный гомоморфизм, где P_0' – некоторый модуль типа $\mathscr{C}_0$; обозначим через p_0': $P_0' \to M'$ (соответственно u_0: $P_0' \to P_0$) композицию гомоморфизма h и проекции $K \to M$ (соответственно $K \to P_0$); гомоморфизм p_0' сюръективен, и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_0' & \xrightarrow{u_0} & P_0 \\ {\scriptstyle p_0'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_0} \\ M' & \xrightarrow[f]{} & M. \end{array}$$

Достаточно теперь применить индуктивное предположение к гомоморфизму

$$\operatorname{Ker} p_0' \to \operatorname{Ker} p_0,$$

получаемому из u_0.

Лемма 5. *Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & P' & \xrightarrow{u} & P & & & & \\ & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

в которой (P, p) (соответственно (P', p')) – левая резольвента для M (соответственно M') и нижняя горизонтальная строка представляет собой точную последовательность. Существует гомоморфизм p'': $\operatorname{Con}(u) \to M''$.

Действительно, точная последовательность (с. 41, предложение 7)

$$0 \to P \xrightarrow{\pi} \operatorname{Con}(u) \xrightarrow{\delta} P'(-1) \to 0$$

дает гомологическую точную последовательность

$$\to H_n(P) \to H_n(\operatorname{Con}(u)) \to H_{n-1}(P') \to \ldots$$

$$\ldots \to H_1(\operatorname{Con}(u)) \to H_0(P') \xrightarrow{\partial} H_0(P) \to H_0(\operatorname{Con}(u)) \to 0.$$

Согласно лемме 3, а), с. 41, $\partial = -H_0(u)$. Так как $H_n(P) = 0 = H_n(P')$ при $n > 0$ и так как отображение $H_0(u)$: $H_0(P') \to H_0(P)$ отождествляется с f: $M' \to M$, то заключаем, что $H_n(\operatorname{Con}(u)) = 0$ при $n > 0$ и что модуль $H_0(\operatorname{Con}(u))$ изоморфен M'', откуда следует утверждение леммы.

Докажем теперь теорему.

а) Пусть M – A-модуль типа $\mathscr{C}$. Для всякой ограниченной левой резольвенты (P, p) модуля M типа $\mathscr{C}_0$ элемент $\chi_{\mathscr{C}_0}(P)$ из $K(\mathscr{C}_0)$ *зависит только от* M. Действительно, пусть (P_1, p_1) и (P_2, p_2) – две резольвенты этого типа. Рассмотрим резольвенту

$$(P_1 \times P_2;\ p_1 \times p_2)$$

А-модуля $M \times M$ и гомоморфизм Δ: $x \mapsto (x, x)$ из M в $M \times M$. Согласно лемме 4, существуют ограниченная резольвента (Q, q) для M типа $\mathscr{C}_0$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{u} & P_1 \times P_2 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1 \times p_2} \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M ; \end{array}$$

из нее получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{u \circ pr_i} & P_i \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ M & \xrightarrow{1_M} & M , \end{array} \qquad i = 1, 2 .$$

Согласно лемме 5, $\mathrm{Con}(u \circ pr_i)$ имеет нулевую гомологию, следовательно, $u \circ pr_i$ – гомологизм и $\chi_{\mathscr{C}_0}(Q) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P_i)$ (с. 44, предложение 10); из этого следует, что $\chi_{\mathscr{C}_0}(P_1) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P_2)$, что и утверждалось.

б) Для всякого А-модуля M типа $\mathscr{C}$ пусть $\varphi(M) \in K(\mathscr{C}_0)$ обозначает общее значение элементов $\chi_{\mathscr{C}_0}(P)$ для всех ограниченных левых резольвент P модуля M типа $\mathscr{C}_0$. Покажем, что функция φ: $\mathscr{C} \to K(\mathscr{C}_0)$ *аддитивна*. Пусть, следовательно,

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \to M'' \to 0$$

– точная последовательность А-модулей типа $\mathscr{C}$. Согласно лемме 4, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} & & P' & \xrightarrow{u} & P & & & & \\ & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 , \end{array}$$

в которой (P, p) и (P', p') – ограниченные левые резольвенты типа $\mathscr{C}_0$. Тогда имеем:

$$\varphi(M) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P), \quad \varphi(M') = \chi_{\mathscr{C}_0}(P')$$

и, согласно лемме 5,

$$\varphi(M'') = \chi_{\mathscr{C}_0}(\mathrm{Con}(u)) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P) - \chi_{\mathscr{C}_0}(P') = \varphi(M) - \varphi(M'),$$

что и требовалось доказать.

в) Пусть теперь β: $K(\mathscr{C}) \to K(\mathscr{C}_0)$ – гомоморфизм, при котором, в предшествующих обозначениях, $\beta([M]_{\mathscr{C}}) = \chi_{\mathscr{C}_0}(P)$. Так как p – гомологизм, то $\chi_{\mathscr{C}}(P) = [M]_{\mathscr{C}}$, следовательно, $\alpha \circ \beta([M]_{\mathscr{C}}) = \alpha(\chi_{\mathscr{C}_0}(P)) = \chi_{\mathscr{C}}(P) = [M]_{\mathscr{C}}$ и $\alpha \circ \beta = 1_{K(\mathscr{C})}$. Если M типа $\mathscr{C}_0$, то $(M, 1_M)$ – резольвента модуля M, следовательно, $\varphi(M) = [M]_{\mathscr{C}_0}$ и $\beta \circ \alpha = 1_{K(\mathscr{C}_0)}$, что завершает доказательство теоремы.

Мы применим эту теорему к модулям "конечной проективной размерности" в § 8 (с. 144).

Упражнения

1. Пусть a, b – два таких элемента из А, что левый аннулятор элемента a (соответственно b) равен идеалу Ab (соответственно Aa). Показать, что последовательность

$$\ldots \to A_s \xrightarrow{\delta_a} A_s \xrightarrow{\delta_b} A_s \xrightarrow{\delta_a} A_s \xrightarrow{\delta_b} \ldots \to A_s \xrightarrow{\delta_a} A_s \to A/Aa \to 0,$$

в которой δ_a (соответственно δ_b) обозначает умножение справа на a (соответственно на b), определяет свободную резольвенту А-модуля A/Aa. Показать, что эта конструкция применима в следующих двух случаях:

α) Пусть A_0 – кольцо; возьмем $A = A_0(\epsilon)$ (с. 32), $a = b = \epsilon$.

β) Пусть G – конечная циклическая группа, σ – порождающий группы G, k – коммутативное кольцо. Возьмем $A = k^{(G)}$, $a = 1 - e_\sigma$, $b = \sum_{\sigma \in G} e_\sigma$.

2. Предположим, что кольцо А *коммутативно*. Пусть B – некоторая А-алгебра; для $n \geqslant 0$ обозначим через $\mathscr{A}^n(B)$ тензорное произведение над А $(n+1)$ модулей, равных B. Положим $\mathscr{A}^n(B) = 0$ при

$n < 0$ и $\mathscr{A}(B) = \bigoplus_n \mathscr{A}^n(B)$. Определим градуированный A-эндоморфизм d верхней степени +1 на $\mathscr{A}(B)$, положив:

$$d(b_0 \otimes \ldots \otimes b_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes 1_B \otimes b_i \otimes \ldots \otimes b_n \text{ для } b_1, \ldots, b_n \in B.$$

а) Показать, что $d \circ d = 0$, так что $(\mathscr{A}(B), d)$ – комплекс A-модулей. Если M – некоторый A-модуль, то обозначим через $\mathscr{A}(B, M)$ комплекс, в котором $\mathscr{A}^n(B, M) = \mathscr{A}^n(B) \otimes_A M$, а дифференциал есть $d \otimes 1_M$.

б) Предположим, что алгебра B представляет собой *строго плоский* A-модуль (с 26, упражнение 9). Показать, что комплекс $\mathscr{A}(B, M)$ определяет правую резольвенту A-модуля M. (Достаточно проверить, что комплекс $B \otimes_A \mathscr{A}(B, M)$ определяет резольвенту для $B \otimes_A M$; построить A-линейный гомотопизм между этими двумя комплексами.)

3. Пусть B – кольцо, $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал в B, $\mathfrak{b}$ – левый идеал в B, содержащий $\mathfrak{a}$. Обозначим через A кольцо $B/\mathfrak{a}$, через p: $B \to A$ – гомоморфизм перехода к факторкольцу и через $\mathfrak{b}'$ – идеал $p(\mathfrak{b}) \subset A$.

а) Рассмотрим последовательность канонических вложений

$$\ldots \to \mathfrak{a}^n\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}^n \to \mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}^{n-1} \to \ldots \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to B.$$

Показать, что последовательность, получаемая тензорным умножением на $B/\mathfrak{a}$:

$$\ldots \to \mathfrak{a}^n\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^{n+1}\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \to \ldots \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \to \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \to A,$$

определяет левую резольвенту A-модуля $A/\mathfrak{b}'$.

б) Предположим, что идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ представляют собой *свободные* левые B-модули. Показать, что предыдущая резольвента является свободной резольвентой A-модуля $A/\mathfrak{b}'$.

в) Пусть G – группа, k – коммутативное кольцо, $A = k^{(G)}$ – групповая алгебра группы G над k, ϵ: $A \to k$ – гомоморфизм k-алгебр, при котором $\epsilon(e_g) = 1$ для всякого $g \in G$. Наделим k структурой (левого) A-модуля, определяемой гомоморфизмом ϵ. Пусть $(g_\iota)_{\iota \in I}$ – некоторое порождающее семейство группы G, F – свободная группа, построенная на I, $B = k^{(F)}$, π: $F \to G$ – гомоморфизм, при котором $\pi(\iota) = g_\iota$ для $\iota \in I$, p: $B \to A$ – гомоморфизм k-алгебр, получаемый из π. Показать, что идеалы $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(p)$ и $\mathfrak{b} = \mathrm{Ker}(\epsilon \circ p)$ являются свободными левыми B-модулями; получить отсюда свободную резольвенту $k^{(G)}$-модуля k.

(Согласно I, p. 147, exercice 20, группа $\mathrm{Ker}\,\pi$ обладает некоторым базисным семейством $(r_\alpha)_{\alpha \in J}$; показать, что элементы $(e_{r_\alpha} - 1)$ для $\alpha \in J$ (соответственно $(e_\iota - 1)$ для $\iota \in I$) образуют базис левого B-модуля $\mathfrak{a}$ (соответственно $\mathfrak{b}$).)

г) В обозначениях из в) положим $R = \mathrm{Ker}(\pi)$; пусть φ: $R \to R/(R, R)$ – отображение перехода к факторгруппе. Наделим k-модуль $k \otimes_{\mathbf{Z}} R/(R, R)$ структурой A-модуля, для которой

$$e_{\pi(f)}(1 \otimes \varphi(r)) = 1 \otimes \varphi(frf^{-1})$$

при любых $r \in R$, $f \in F$. Показать, что существует точная последовательность A-модулей

$$0 \to k \otimes_{\mathbf{Z}} R/(R, R) \to A^{(I)} \to A \to k \to 0.$$

4. Предположим, что кольцо A коммутативно.

Пусть G – группа, K – симплициальная схема (с. 51, упражнение 19). *Действием группы G на* K называется гомоморфизм G в группу биективных симплициальных отображений симплициальной схемы K в себя.

а) Действие группы G на K определяет действие на A-модуле S(K, A) (с. 52, упражнение 19); показать, что это действие превращает S(K, A) в комплекс $A^{(G)}$-модулей.

б) Предположим, что группа G действует *свободно* на множестве, на котором определена симплициальная схема K. Показать, что $A^{(G)}$-модули $S_n(K, A)$ свободны.

в) Предположим, что симплициальная схема K *коническая*. Показать, что $A^{(G)}$-комплекс S(K, A) определяет левую резольвенту для A, наделенного структурой $A^{(G)}$-модуля, при которой $e_g a = a$ для любых $g \in G$, $a \in A$.

г) Пусть $|G|$ – симплициальная схема $(G, \mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ – множество всех конечных подмножеств в G. Группа G действует на симплициальной схеме $|G|$ посредством левых сдвигов; показать, что $A^{(G)}$-комплекс $S(|G|, A)$ представляет собой свободную резольвенту $A^{(G)}$-модуля A.

д) Пусть $B(A^{(G)}, A)$ – стандартная резольвента $A^{(G)}$-модуля A; для всякого $n \geqslant 0$ $A^{(G)}$-модуль $B_n(A^{(G)}, A)$ отождествляется с $(A^{(G)})^{\otimes(n+1)}$. Показать, что A-линейный гомоморфизм u: $S(|G|, A) \to B(A^{(G)}, A)$, определяемый по формуле

$$u(g_0, \ldots, g_n) = g_0 \otimes g_0^{-1}g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n-1}^{-1}g_n \text{ для } g_0, \ldots, g_n \in G,$$

представляет собой изоморфизм $A^{(G)}$-комплексов.

5. Н. Бурбаки

5. а) Пусть $0 \to K \to P \to M \to 0$, $0 \to K' \to P' \to M \to 0$ – две точных последовательности A-модулей, в которых P и P′ проективны. Показать, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & K \oplus P' & \to & P \oplus P' & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\ 0 & \to & P \oplus K' & \to & P \oplus P' & \to & M & \to & 0, \end{array}$$

в которой горизонтальные строки точные, а u и v – изоморфизмы (ср. II, p. 183, exercice 4).

б) Пусть n – целое число $\geqslant 0$, (P, p) и (P', p') – две левых резольвенты A-модуля M, в которых $P_j = P'_j = 0$ при $j > n$ и A-модули P_i и P'_i проективны при $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Показать, что A-модули $\overset{\oplus}{i \geqslant 0}(P_{2i} \oplus P'_{2i+1})$ и $\overset{\oplus}{j \geqslant 0}(P'_{2j} \oplus P_{2j+1})$ изоморфны.

в) В предположениях пункта б) показать, что существуют два проективных комплекса R, R′ с нулевой гомологией, в которых $R_i = R'_i = 0$ при $i \notin [0, n]$, и изоморфизм резольвент u: $P \oplus R \to P' \oplus R'$.

¶ 6. Пусть M – левый A-модуль. *Представлением длины n* или *n-представлением* модуля M называется точная последовательность

$$L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0,$$

в которой L_i – свободный левый A-модуль $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Это представление называется *конечным*, если все L_i – свободные модули конечного типа.

Если M – левый A-модуль конечного типа, то через $\lambda(M)$ обозначим верхнюю грань (конечную или равную $+\infty$) целых чисел $n \geqslant 0$, для которых M обладает конечным n-представлением. Если M не имеет конечного типа, то положим $\lambda(M) = -1$.

а) Пусть $0 \to P \to N \to M \to 0$ – точная последовательность левых A-модулей. Тогда $\lambda(N) \geqslant \inf(\lambda(P), \lambda(M))$.

б) Пусть $L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0$ – конечное n-представление для M; если $\lambda(M) > n$, то показать, что $\operatorname{Ker}(d_n)$ – модуль конечного типа (использовать упражнение 5, б)).

в) Показать, что в предположениях пункта а) имеет место соотношение:

$$\lambda(M) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P) + 1).$$

(Если $n \leqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P) + 1)$, то показать индукцией по n, что $\lambda(M) \geqslant n$, рассуждая как в а) и используя б).)

г) Показать, что в предположениях пункта а) имеет место соотношение

$$\lambda(P) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(M) - 1).$$

(Тот же метод, что в с).) Вывести отсюда, что если $\lambda(N) = +\infty$, то $\lambda(M) = \lambda(P) + 1$.

д) Вывести из а), в) и г), что если $N = M \oplus P$, то

$$\lambda(N) = \inf(\lambda(M), \lambda(P)).$$

В частности, для того чтобы модуль N допускал конечное представление, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали M и P.

е) Пусть N_1, N_2 – два подмодуля A-модуля M. Предположим, что N_1 и N_2 допускают конечное представление. Для того чтобы модуль $N_1 + N_2$ допускал конечное представление, необходимо и достаточно, чтобы модуль $N_1 \cap N_2$ имел конечный тип.

7. а) В обозначениях из упражнения 6 показать, что если M – проективный модуль, то

$$\lambda(M) = -1 \quad \text{или} \quad \lambda(M) = +\infty.$$

Если A – нётерово слева кольцо, то для всякого A-модуля M либо $\lambda(M) = -1$, либо $\lambda(M) = +\infty$.

б) Если $\mathfrak{a}$ – левый идеал кольца A, не имеющий конечного типа, то $A_s/\mathfrak{a}$ – моногенный A-модуль, не допускающий конечного представления, иначе говоря, $\lambda(A_s/\mathfrak{a}) = 0$ (ср. с. 15, предложение 6).

в) Дать пример моногенного левого идеала $\mathfrak{a}$ в некотором кольце A, для которого модуль $A_s/\mathfrak{a}$ (обладающий конечным представлением) имеет сопряженный, который не является правым A-модулем конечного типа.

г) Пусть K – поле, E – векторное пространство $K^{(N)}$, (e_n) – канонический базис E, T – тензорная алгебра пространства E, базис которой образован всеми конечными произведениями $e_{i_1}, e_{i_2} \ldots e_{i_k}$ $(k \geqslant 0;\ i_j \in N$ для всякого $j)$. Для заданного целого n пусть $\mathfrak{b}$ – двусторонний идеал в T, порожденный произведениями $e_1 e_0$, $e_2 e_1$, ..., $e_n e_{n-1}$ и $e_{n+k} e_n$ для всякого $k \geqslant 1$; пусть A – факторкольцо $T/\mathfrak{b}$, и для всякого целого m пусть a_m – канонический образ e_m в A. Показать, что если $M = A_s/Aa_0$, то $\lambda(M) = n$ (заметить, что для $m \leqslant n-1$ левый аннулятор a_m равен Aa_{m+1}, и использовать упражнение 6, б)).

8. Пусть C – коммутативное кольцо, E, F – два C-модуля. Показать, что $\lambda(E \otimes_C F) \geqslant \inf(\lambda(E), \lambda(F))$.

9. Пусть ρ: $A \to B$ – гомоморфизм колец, M – A-модуль.

а) Если B – плоский правый A-модуль и если M обладает конечным n-представлением, то B-модуль $B \otimes_A M$ обладает конечным n-представлением.

б) Если B – строго плоский правый A-модуль (с. 26, упражнение 9) и если B-модуль $B \otimes_A M$ обладает конечным n-представленнем, то M обладает конечным n-представлением (использовать упражнение 6, б) и упражнение 12, с. 26).

10. Пусть E – A-модуль. E называется *псевдокогерентным*, если всякий подмодуль конечного типа в E конечно представим; всякий подмодуль псевдокогерентного модуля псевдокогерентен. Модуль E называется *когерентным*, если он псевдокогерентен и имеет конечный тип (следовательно, конечно представим).

а) Пусть $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ – точная последовательность A-модулей. Показать, что если модуль E псевдокогерентен (соответственно когерентен) и E' конечного типа, то модуль E'' псевдокогерентен (соответственно когерентен). Показать, что если E' и E'' псевдокогерентны (соответственно когерентны), то тем же свойством обладает E. Показать, что если E и E'' когерентны, то тем же свойством обладает E' (использовать предложение 6, с. 15).

б) Пусть E – когерентный A-модуль, E' – псевдокогерентный (соответственно когерентный) A-модуль. Показать, что для всякого гомоморфизма $u: E \to E'$ модули $\mathrm{Im}(u)$ и $\mathrm{Ker}(u)$ когерентны, а $\mathrm{Coker}(u)$ псевдокогерентен (соответственно когерентен) (использовать а)).

в) Показать, что всякая прямая сумма (соответственно всякая конечная прямая сумма) псевдокогерентных (соответственно когерентных) модулей представляет собой псевдокогерентный (соответственно когерентный) модуль.

г) Если E – псевдокогерентный модуль и если M, N – когерентные подмодули в E, то показать, что модули $M + N$ и $M \cap N$ когерентны (использовать а) и в)).

д) Предположим, что кольцо A коммутативно. Показать, что если E – когерентный A-модуль и F – когерентный (соответственно псевдокогерентный) A-модуль, то $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ – когерентный (соответственно псевдокогерентный) A-модуль. (Свести к случаю, когда F когерентен, рассмотреть конечное представление для E и использовать б).)

¶ 11. а) Пусть A – кольцо. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) A-модуль A_S когерентен (упражнение 10).

β) Всякий конечно представимый A-модуль когерентен.

γ) Для всякого конечно представимого правого A-модуля M сопряженный A-модуль M^* имеет конечный тип.

δ) Для всякого множества I правый A-модуль A_d^I плоский.

ϵ) Всякое произведение плоских правых A-модулей является плоским.

(Чтобы доказать, что из α) следует β), использовать упражнение 10, б). Чтобы увидеть, что из δ) следует γ), использовать теорему 1, с. 18; чтобы показать, что из α) следует ϵ), использовать упражнение 18, с. 27).

Кольцо, удовлетворяющее этим свойствам, называется *когерентным слева* (или просто *когерентным*), и аналогичным образом определяется понятие кольца, *когерентного справа*.

б) Показать, что нётерово (слева) кольцо когерентно. Дать пример артинова справа кольца, не являющегося когерентным (ср. VIII, § 1, exercice 4; Алгебра, VIII, с. 144, упражнение 4).

в) Показать, что абсолютно плоское кольцо (с. 26, упражнение 16) когерентно.

г) Показать, что если A – когерентное кольцо и M – A-модуль, то $\lambda(M) = -1$ или $\lambda(M) = 0$ или $\lambda(M) = +\infty$ (упражнение 6). В частности, всякий конечно представимый A-модуль обладает резольвентой из свободных модулей конечного типа.

д) Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ – индуктивная система колец с направленным множеством индексов, и пусть $A = \varinjlim A_\alpha$. Предположим, что для $\alpha \leqslant \beta$ кольцо A_β является плоским правым A_α-модулем. Показать, что если кольца A_α когерентны, то таково же и кольцо A. (Заметить, что A – плоский правый A_α-модуль для всякого α и что для всякого левого идеала конечного типа $\mathfrak{a} \subset A$ существуют такие индекс α и идеал $\mathfrak{a}_\alpha$ в A_α, что $\mathfrak{a}$ изоморфен $A \otimes_{A_\alpha} \mathfrak{a}_\alpha$.)

е) Вывести из д), что всякое кольцо многочленов (от произвольного конечного или бесконечного множества переменных) над нётеровым коммутативным кольцом когерентно. Вывести отсюда, что факторкольцо когерентного кольца не обязательно когерентно.

ж) Для того чтобы кольцо A было когерентно слева, необходимо и достаточно, чтобы левый аннулятор всякого элемента из A был конечного типа и чтобы пересечение двух левых идеалов конечного типа имело конечный тип (использовать упражнение 6, е)).

12. Пусть $\mathfrak{c}$ – бесконечное кардинальное число. Предположим, что всякий левый идеал кольца A обладает множеством порождающих мощности $\leqslant \mathfrak{c}$. Показать, что всякий A-модуль, порожденный множеством элементов мощности $\leqslant \mathfrak{c}$, обладает левой резольвентой из свободных A-модулей ранга $\leqslant \mathfrak{c}$ (ср. VIII, § 1, exercice 13).

13. Пусть M – A-модуль. *Минимальной инъективной резольвентой* для M называется такая инъективная резольвента (e, I) модуля M, что I^n есть инъективная оболочка для $Z^n(I)$ при всяком $n \geqslant 0$.

а) Всякий A-модуль обладает минимальными инъективными резольвентами; две такие резольвенты изоморфны.

б) Пусть I, I' – две инъективные резольвенты для M, причем I минимальна; пусть $f: I \to I'$ и $g: I' \to I$ – два морфизма резольвент. Тогда f инъективен, g сюръективен и I' есть прямая сумма подкомплексов $\mathrm{Im}(f)$ (изоморфного I) и $\mathrm{Ker}(g)$ (имеющего нулевую гомологию).

14. Предположим, что A – *нётерово локальное* кольцо; обозначим через $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал. Пусть L – комплекс A-модулей конечного типа, нулевой в степенях < 0, M – A-модуль конечного типа и $q: L \to M$ – морфизм. Сделаем следующие предположения:

(i) Гомоморфизм $1 \otimes q$: $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A L_0 \to (A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$ инъективен.

(ii) $d_i(L_i) \subset \mathfrak{m} L_{i-1}$ при $i \geqslant 1$ и отображение $\tilde{d}_i$: $L_i/\mathfrak{m}L_i \to \mathfrak{m}L_{i-1}/\mathfrak{m}^2 L_{i-1}$ инъективно.

Пусть (P, p) – проективная резольвента модуля M, u: $L \to P$ – морфизм, для которого $p \circ u = q$. Доказать, что u инъективен и что $u(L)$ – прямой множитель в P, рассматриваемом как градуированный A-модуль (свести к случаю, когда резольвента P миннмальна, и использовать VIII, § 8, n°3, cor. 3).

¶ 15. Пусть A – нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ – его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть P – минимальная проективная резольвента A-модуля k; для $n \geqslant 0$ обозначим через b_n ранг свободного A-модуля P_n.

а) Показать, что $b_0 = 1$ и что $b_1 = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ – минимальное число порождающих для $\mathfrak{m}$.

б) Если кольцо A коммутативно, то $b_2 \geqslant b_1(b_1 - 1)/2$ (рассмотреть точную последовательность $P_2 \to \mathfrak{m}P_1 \to \mathfrak{m}^2 \to 0$).

в) Предположим, что кольцо A артиново (не обязательно коммутативное). Доказать неравенство $b_2 \geqslant b_1^2/4$. (Пусть M_l – подмодуль в P_2, образованный элементами x, для которых $d_2(x) \in \mathfrak{m}^l P_1$; показать, что

$$\mathfrak{m}^l P_2 \subset M_{l+1}$$

и что существует точная последовательность $0 \to M_l/M_{l+1} \to \mathfrak{m}^l P_1/\mathfrak{m}^{l+1} P_1 \to \mathfrak{m}^{l+1}/\mathfrak{m}^{l+2} \to 0$. Вывести отсюда, что многочлен $p(t) = \sum_l (\dim_k(\mathfrak{m}^l/\mathfrak{m}^{l+1}))t^l$ удовлетворяет соотношению $(b_2 t^2 - b_1 t + 1)\, p(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Закончить, рассматривая отдельно случаи $b_1 = 1$, $b_1 \geqslant 2$.)

16. а) Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность A-модулей, (P', p') (соответственно (P'', p'') – проективная резольвента для M' (соответственно M''). Показать, что существуют проективная резольвеита (P, p) для M и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & P' & \to & P & \to & P'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' \to 0, \end{array}$$

в которой горизонтальные строки точные.

б) Пусть $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ – вторая точная последовательность A-модулей, (Q, q) (соответственно (Q', q'), соответственно (Q'', q'') – проективная резольвента для N (соответственно N', соответственно N''), причем существует коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & Q' & \to & Q & \to & Q'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q''} \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' \to 0 \end{array}$$

Пусть, с другой стороны,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u''} \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' \to 0 \end{array}$$

– коммутативная диаграмма точных последовательностей, и пусть $\tilde{u}'$: $P' \to Q'$ и $\tilde{u}''$: $P'' \to Q''$ – морфизмы комплексов, для которых $u' \circ p' = q' \circ \tilde{u}'$ и $u'' \circ p'' = q'' \circ \tilde{u}''$. Показать, что существует морфизм комплексов $\tilde{u}$: $P \to Q$, для которого $u \circ p = q \circ \tilde{u}$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & P' & \to & P & \to & P'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{u}'} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{u}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{u}''} \\ 0 & \to & Q' & \to & Q & \to & Q'' \to 0 \end{array} \qquad (*)$$

коммутативиа.

в) Пусть $\tilde{u}_1'$: $P' \to Q'$, $\tilde{u}_1$: $P \to Q$ и $\tilde{u}_1''$: $P'' \to Q''$ – три морфизма комплексов, для которых

$$u' \circ p' = q' \circ \tilde{u}_1', \quad u \circ p = q \circ \tilde{u}_1, \quad u'' \circ p'' = q'' \circ \tilde{u}_1''$$

и диаграмма (*) коммутативна; пусть s' (соответствеино s'') – гомотопня, связывающая $\tilde{u}'$ с $\tilde{u}_1'$ (соответственно $\tilde{u}''$ с $\tilde{u}_1''$). Показать, что существует гомотопия s, связывающая $\tilde{u}$ и $\tilde{u}_1$, для которой диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & P' & \to & P & \to & P'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle s'} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle s''} \\ 0 & \to & Q' & \to & Q & \to & Q'' \to 0 \end{array}$$

коммутативна.

г) Сформулировать и доказать результаты, соответствующие а), б), в), дяя инъективных резольвеит.

¶ 17. В этом упражнении, если (K, d', d'') – бикомплекс (с. 48, упражнение 11), через $K_{p,\cdot}$ будет обозначаться комплекс $(\bigoplus_n K_{p,n}, d'')$. Всякий комплекс будет рассматриваться как бикомплекс, нулевой в степени (p, q) при $q \neq 0$.

Пусть C – комплекс A-модулей. *Проективной резольвентой* для C называется пара (P, p), в которой P – бикомплекс и p: $P \to C$ – морфизм бикомплексов, причем $P_{p,q} = 0$ при $q < 0$ и комплекс $P_{p,\cdot}$ (соответственно $Z'_{p,\cdot}(P)$, $B'_{p,\cdot}(P)$, $H'_{p,\cdot}(P)$) определяет проективную резольвенту для C_p (соответственно $Z_p(C)$, $B_p(C)$, $H_p(C)$) при всяком $p \in \mathbf{Z}$. Для того чтобы бикомплекс (P, p) был проективной резольвентой для C, достаточно, чтобы комплексы $B'_{p,\cdot}(P)$ и $H'_{p,\cdot}(P)$ определяли при всяком p проективные резольвенты для $B_p(C)$ и $H_p(C)$.

а) Показать, что всякий A-комплекс C обладает проективной резольвентой (выбрать для всякого p проективные резольвенты $B_{p,\cdot}$ и $H_{p,\cdot}$ для $B_p(C)$ и $H_p(C)$; используя упражнение 16, а), построить проективные резольвенты $Z_{p,\cdot}$ для $Z_p(C)$ и $P_{p,\cdot}$ для C_p, а также точные последовательности:

$0 \to B_{p,\cdot} \to Z_{p,\cdot} \to H_{p,\cdot} \to 0$, $\quad 0 \to Z_{p,\cdot} \to P_{p,\cdot} \to B_{p-1,\cdot} \to 0$).

б) Пусть C' – другой комплекс, (P', p') – проективная резольвента для C', u: $C \to C'$ – морфизм комплексов. Показать, что существует морфизм бикомплексов $\tilde{u}$: $P \to P'$, для которого $u \circ p = p' \circ \tilde{u}$ (для всякого $p \in \mathbf{Z}$ выбрать морфизмы $B'_{p,\cdot}(P) \to B'_{p,\cdot}(P')$ и $H'_{p,\cdot}(P) \to H'_{p,\cdot}(P')$; построить $\tilde{u}$ как в предшествующем пункте, используя упражнение 16, б)).

в) Пусть v: $C \to C'$ – морфизм комплексов, гомотопный u, и пусть $\tilde{v}$: $P \to P'$ – морфизм бикомплексов, для которого $v \circ p = p' \circ \tilde{v}$. Показать, что $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ гомотопны (в смысле упражнения 11, в), с. 49; использовать упражнение 16, в)).

г) Пусть E – подмножество в Z, C – A-комплекс, в котором $C_p = 0$ при $p \in E$. Показать, что существует проективная резольвента (P, p) для C, в которой $P_{p,q} = 0$ для $p \in E$.

д) Предположим, что существует такое целое число n, что всякий A-модуль обладает проективной резольвентой длины $\leqslant n$. Показать, что всякий A-комплекс C обладает проективной резольвентой (P, p), в которой $P_{p,q} = 0$ при $q > n$.

е) Пусть C – A-комплекс. *Инъективной резольвентой* для C называется пара (e, I), в которой I – бикомплекс и e: $C \to I$ – морфизм бикомплексов, причем $I^{p,q} = 0$ при $q < 0$ и комплекс $I^{p,\cdot}$ (соответственно ${}'Z^{p,\cdot}(I)$, ${}'B^{p,\cdot}(I)$, ${}'H^{p,\cdot}(I)$) определяет инъективную резольвенту для C^p (соответственно $Z^p(C)$, $B^p(C)$, $H^p(C)$) при всех $p \in \mathbf{Z}$. Сформулировать и доказать аналоги результатов а) – д) для инъективных резольвент.

18. Предположим, что кольцо A коммутативно. *Грудированной дифференциальной A-алгеброй* называется A-алгебра, градуированная по типу $\mathbf{Z}$, для которой $S_n = 0$ при $n < 0$, наделенная антидифференцированием d степени -1, удовлетворяющим условию $d \circ d = 0$. Будем обозначать попрежнему через S комплекс A-модулей (S, d).

а) Пусть C – комплекс A-модулей, нулевой в степенях < 0. Показать, что на $S = T(C)$ (соответственно $S = S(C)$, соответственно $S = \Lambda(C)$) существует структура градуированной дифференциальной A-алгебры, для которой каноническое вложение C в S является морфизмом комплексов.

б) Показать, что умножение в S индуцирует структуру градуированной A-алгебры на $H(S)$.

в) Пусть S, T – две градуированных дифференциальных A-алгебры. Положим $D(s \otimes t) = ds \otimes t + (-1)^p s \otimes dt$ для $s \in S_p$, $t \in T$. Показать, что D определяет структуру градуированной дифференциальной A-алгебры на косом тензорном произведении $S \hat{\otimes}_A T$ (III, p. 49).

19. Предположим, что кольцо A коммутативно.

а) Пусть (S, d_S) – градуированная дифференциальная A-алгебра (упражнение 18), M – A-модуль, u: $M \to Z_n(S)$ – A-гомоморфизм. Показать, что на $S \otimes_A T(M)$ существует такая структура градуированной дифференциальной A-алгебры, что $d(s \otimes 1) = d_S s \otimes 1$ для $s \in S$ и $d(1 \otimes m) = u(m) \otimes 1$ для $m \in M$.

б) Пусть B – A-алгебра. Показать, что существуют градуированная дифференциальная A-алгебра S и гомоморфизм A-алгебр p: $S_0 \to B$ такие, что (S, p) представляет собой свободную резольвенту A-модуля B. (Построить индукцией по n с помощью а) градуированную дифференциальную алгебру $S(n)$, свободную в каждой степени, для которой $H_i(S(n)) = 0$ при $0 < i < n$ и $H_0(S(n)) = B$.)

в) Если алгебра B коммутативна, показать, что можно найти *косокоммутативную* (III, p. 53) A-алгебру S, удовлетворяющую условиям пункта б). Если, кроме того, A нётерово и B есть факторкольцо кольца A по некоторому идеалу, то можно выбрать S таким образом, что $S_0 = A$ и S_n – A-модуль конечного типа для всякого n.

¶ 20. Предположим, что кольцо A представляет собой алгебру над некоторым коммутативным кольцом k. Пусть η: $k \to A$ – гомоморфизм, при котором $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$ для $\lambda \in k$, и пусть $\bar{A}$ – его коядро. Если a – элемент из A, то будем обозначать через $\bar{a}$ его образ в $\bar{A}$. Положим $N_n(A) = A \otimes_k \bar{A}^{\otimes n} \otimes_k A$ при $n \geqslant 0$, $N_n(A) = 0$ при $n < 0$ и

$$N(A) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} N_n(A).$$

а) Показать, что существует градуированный степени -1 (A, A)-эндоморфизм d бимодуля N(A), при котором

$$d(a\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_n\otimes b)=aa_1\otimes\bar a_2\otimes\ldots\otimes\bar a_n\otimes b+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a\otimes\ldots\otimes\overline{a_ia_{i+1}}\otimes\ldots\otimes\bar a_n\otimes b+$$

$$+(-1)^n a\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_{n-1}\otimes a_nb \quad \text{для} \quad a,a_1,\ldots,a_n,\ b\in A.$$

б) Показать, что $d\circ d=0$, так что N(A) – комплекс (A, A)-бимодулей. Если M – левый A-модуль, то обозначим через N(A, M) A-комплекс $N(A)\otimes_A M$.

в) Пусть B(A, M) – стандартная резольвента для M (с. 62), p: B(A, M) $\to$ N(A, M) – A-гомоморфизм, определяемый по формуле: $p(a_0\otimes\ldots\otimes a_n\otimes m)=a_0\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_n\otimes m$ для $a_0,\ldots,a_n\in A$, $m\in M$. Показать, что p – гомотопизм A-комплексов (построить по индукции отображение, обратное с точностью до гомотопии).

*21. Пусть k – коммутативное кольцо, $\mathfrak{g}$ – k-алгебра Ли, U – ее обертывающая алгебра (см. LIE, I, § 2; Группы и алгебры Ли, I, с. 20). Предположим, что $\mathfrak{g}$ – свободный k-модуль.

а) Показать, что для всякого $n\geqslant 0$ существует инъективный U-гомоморфизм

$$j_n\colon U\otimes_k\Lambda^n(\mathfrak{g})\to U^{\otimes(n+1)},$$

при котором

$$j_n(u\otimes(x_1\wedge\ldots\wedge x_n))=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)u\otimes x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(n)}$$

для $u\in U$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathfrak{g}$.

Тем самым определен градуированный U-гомоморфизм степени 0 j: $U\otimes_k\Lambda(\mathfrak{g})\to B(U,k)$, где $B(U,k)$ – стандартная резольвента левого U-модуля k (структура U-модуля на k получена с помощью естественного гомоморфизма $U\to k$). Показать, что $U\otimes_k\Lambda(\mathfrak{g})$ отождествляется посредством j с подкомплексом в $B(U,k)$, причем дифференциал на $U\otimes_k\Lambda(\mathfrak{g})$ задается по формуле:

$$d(u\otimes(x_1\wedge\ldots\wedge x_n))=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(-1)^{i+1}ux_i\otimes(x_1\wedge\ldots\wedge\hat x_i\wedge\ldots\wedge x_n)+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{i+j}u\otimes([x_i,x_j]\wedge x_1\wedge\ldots\wedge\hat x_i\wedge\ldots\wedge\hat x_j\wedge\ldots\wedge x_n)$$

для $u\in U$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathfrak{g}$

(где знак $\hat{}$ над буквой обозначает, что она должна быть опущена). Обозначим через $V(\mathfrak{g})$ таким образом определенный U-комплекс.

б) Показать, что $V(\mathfrak{g})$ определяет свободную резольвенту U-модуля k. (Пусть $(U_n)_{n\geqslant 0}$ – естественная фильтрация на U, $F_rV(\mathfrak{g})$ – k-подмодуль в $V(\mathfrak{g})$, порожденный элементами $u_p\otimes x_q$ для $u_p\in U_p$, $x_q\in\Lambda^q(\mathfrak{g})$, $p+q\leqslant r$. Показать, что $F_rV(\mathfrak{g})$ – подкомплекс в $V(\mathfrak{g})$ и что комплекс $\bigoplus_{r\geqslant 0}F_rV(\mathfrak{g})/F_{r-1}V(\mathfrak{g})$ изоморфен комплексу $S(\mathfrak{g})\otimes\Lambda(\mathfrak{g})$, определенному на с. 160.

§ 4. Произведение кручения

В параграфах 4 – 8 через k обозначается коммутативное кольцо и через A – унитарная ассоциативная k-алгебра. Роль кольца k вспомогательная; мы имеем в виду главным образом следующие три частных случая:

а) *рассматриваем произвольное кольцо* A, *полагаем* $k=\mathbf{Z}$ *и наделяем* A *естественной структурой* **Z**-*алгебры*;

б) *рассматриваем произвольное кольцо* A *и берем в качестве* k *центр* A;

в) *рассматриваем коммутативное кольцо* A *и полагаем* $k=A$.

1. Тензорное произведение двух комплексов

Пусть (C,d) комплекс правых A-модулей и (C',d') – комплекс левых A-модулей. Наделим k-модуль $C\otimes_A C'$ градуировкой, для которой

$$(C\otimes_A C')_n=\sum_{p+q=n}C_p\otimes_A C'_q,$$

и обозначим через D однозначно определенный k-линейный эндоморфизм степени (-1) градуированного модуля $C\otimes_A C'$, при котором

$$D(x\otimes x')=dx\otimes x'+(-1)^p x\otimes d'x', \quad x\in C_p, \quad y\in C'_q, \quad p,q\in\mathbf{Z}. \tag{1}$$

Имеем $D\circ D=0$, так как, в обозначениях из (1),

$$D^2(x\otimes x')=ddx\otimes x'+(-1)^{p-1}dx\otimes d'x'+(-1)^p dx\otimes d'x'+x\otimes d'd'x=0.$$

Комплекс k-модулей $(C \otimes_A C', D)$ называется *тензорным произведением* комплексов (C, d) и (C', d').

Замечания. 1. Когда C' сводится к $C'_0 = M$, то $(C \otimes_A C')_n = C_n \otimes_A M$ и $D = d \otimes 1_M$; например, $C \otimes_A A_s$ естественным образом отождествляется с C. Точно так же, когда C сводится к $C_0 = P$, то $(C \otimes_A C')_n = P \otimes_A C'_n$ и $D = 1_P \otimes d$.

2. Для всякого целого r имеем $(C \otimes_A C')(r) = C(r) \otimes_A C'$, но $(C \otimes_A C')(r)$ и $C \otimes_A C'(r)$ имеют, вообще говоря, разные дифференциалы.

Пусть p, q – два целых числа, $x \in Z_p(C)$, $x' \in Z_q(C')$; тогда элемент $x \otimes x'$ из $C_p \otimes_A C'_q$ принадлежит $Z_{p+q}(C \otimes_A C')$ согласно (1); кроме того, если $y \in C_{p+1}$, $y' \in C'_{q+1}$, то

$$(x + dy) \otimes (x' + d'y') = x \otimes x' + D(y \otimes x' + (-1)^p (x + dy) \otimes y');$$

переходя к фактормодулям, получаем *k-линейное отображение*, называемое *каноническим*:

$$\gamma_{p,q}(C, C'): H_p(C) \otimes_A H_q(C') \to H_{p+q}(C \otimes_A C');$$

если модуль $H(C) \otimes_A H(C')$ наделен градуировкой, при которой

$$(H(C) \otimes_A H(C'))_n = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes_A H_q(C'),$$

то $\gamma_{p,q}$ определяют градуированное k-линейное отображение степени 0

$$\gamma(C, C'): H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C').$$

Предложение 6 из II, p. 59, может быть переформулировано следующим образом.

Предложение 1. *Если комплексы C и C' нулевые справа, то комплекс $C \otimes_A C'$ нулевой справа и каноническое k-линейное отображение*

$$\gamma_{0,0}(C, C'): H_0(C) \otimes_A H_0(C') \to H_0(C \otimes_A C')$$

биективно.

Пусть u: $(C, d) \to (C_1, d_1)$ – морфизм комплексов правых A-модулей и u': $(C', d') \to (C'_1, d'_1)$ – морфизм комплексов левых A-модулей; тогда $u \otimes u'$: $C \otimes_A C' \to C_1 \otimes_A C'_1$ – морфизм комплексов k-модулей; действительно, он градуированный степени 0, и если через D и D_1 обозначены дифференциалы в $C \otimes_A C'$ и $C_1 \otimes_A C'_1$, то для $p, q \in \mathbf{Z}$, $x \in C_p$, $x' \in C'_q$ имеет место:

$$(u \otimes u')(D(x \otimes x')) = u(dx) \otimes u'(x') + (-1)^p u(x) \otimes u'(d'x') =$$
$$= d_1 u(x) \otimes u'(x') + (-1)^p u(x) \otimes d'_1 u'(x') = D_1(u(x) \otimes u'(x')).$$

Кроме того, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H(C) \otimes_A H(C') & \xrightarrow{\gamma(C, C')} & H(C \otimes_A C') \\ \downarrow{\scriptstyle H(u) \otimes H(u')} & & \downarrow{\scriptstyle H(u \otimes u')} \\ H(C_1) \otimes_A H(C'_1) & \xrightarrow[\gamma(C_1, C'_1)]{} & H(C_1 \otimes_A C'_1). \end{array}$$

Пусть A° – k-алгебра, противоположная A, C° (соответственно C'°) – комплекс C (соответственно C'), рассматриваемый как комплекс левых (соответственно правых) A°-модулей. Обозначим через

$$\sigma(C, C'): C \otimes_A C' \to C'^\circ \otimes_{A^\circ} C^\circ$$

однозначно определенное градуированное k-линейное отображение степени 0, при котором для $x \in C_p$, $x' \in C'_q$, $p, q \in \mathbf{Z}$

$$\sigma(C, C')(x \otimes x') = (-1)^{pq} x' \otimes x.$$

Предложение 2. *Отображение $\sigma(C, C'): C \otimes_A C' \to C'^\circ \otimes_{A^\circ} C^\circ$ представляет собою изоморфизм комплексов k-модулей, для которого обратным изоморфизмом служит $\sigma(C'^\circ, C^\circ)$.*

Так как отображения $\sigma(C, C')$ и $\sigma(C'^{\circ}, C^{\circ})$ обратны одно другому, то достаточно доказать, что $\sigma(C, C')$ – морфизм комплексов. Обозначая через D° дифференциал в $C'^{\circ} \otimes_{A^{\circ}} C^{\circ}$, для

$$x \in C_p = C_p^{\circ}, \quad x' \in C'_q = C'^{\circ}_q, \quad p, q \in \mathbf{Z},$$

имеем:

$$\sigma(C, C') \circ D(x \otimes x') = \sigma(C, C')(dx \otimes x' + (-1)^p x \otimes d'x') =$$

$$= (-1)^{(p+1)q} x' \otimes dx + (-1)^{p+p(q+1)} d'x' \otimes x =$$

$$= (-1)^{pq} d'x' \otimes x + (-1)^{pq+q} x' \otimes dx = (-1)^{pq} D^{\circ}(x' \otimes x) = D^{\circ} \circ \sigma(C, C')(x \otimes x');$$

это дает, что $\sigma(C, C') \circ D = D^{\circ} \circ \sigma(C, C')$, откуда следует искомое утверждение.

Изоморфизм $\sigma(C, C')$: $C \otimes_A C' \to C'^{\circ} \otimes_{A^{\circ}} C^{\circ}$ называется *изоморфизмом коммутирования* для тензорного произведения комплексов C и C'.

Если u: $C \to C_1$ и u': $C' \to C'_1$, – как и выше, два морфизма комплексов, то имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_A C' & \xrightarrow{\sigma(C, C')} & C'^{\circ} \otimes_{A^{\circ}} C^{\circ} \\ {\scriptstyle u \otimes u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u' \otimes u} \\ C_1 \otimes_A C'_1 & \xrightarrow[\sigma(C_1, C'_1)]{} & C'^{\circ}_1 \otimes_{A^{\circ}} C^{\circ}_1 . \end{array}$$

Будем предполагать до конца этого пункта, что кольцо A *коммутативно* (общий случай см. в п. 9).

Пусть C, C', C'' – три комплекса A-модулей; канонический гомоморфизм A-модулей (III, p. 64)

$$\varphi\colon (C \otimes_A C') \otimes_A C'' \to C \otimes_A (C' \otimes_A C'')$$

представляет собой *изоморфизм комплексов*, что тотчас проверяется непосредственно из определений.

Более общо, пусть $(C^{(i)}, d^{(i)})_{i \in I}$ – *семейство комплексов* A-модулей, где множество I *конечно и линейно упорядочено*; для упрощения обозначений мы отождествим I с интервалом $[1, r]$ в N. Наделим A-модуль $C = \bigotimes_{i=1}^{r} C^{(i)}$ градуировкой, при которой

$$C_n = \sum_{p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n} (C^{(1)})_{p_1} \otimes (C^{(2)})_{p_2} \otimes \ldots \otimes (C^{(r)})_{p_r},$$

и определим градуированный A-эндоморфизм степени -1 модуля C, положив

$$D(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{p_1 + \ldots + p_{j-1}} x_1 \otimes \ldots \otimes x_{j-1} \otimes d_j x_j \otimes x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_r,$$

где $x_i \in (C^{(i)})_{p_i}$ для $i = 1, \ldots, r$. Тогда (C, D) – комплекс A-модулей, называемый *тензорным произведением* семейства (C_i, d_i). Для всякой строго возрастающей последовательности элементов $r_0, \ldots, r_k$ из $[0, r]$, в которой $r_0 = 0$, $r_k = r$, *канонический изоморфизм ассоциативности*

$$\bigotimes_{j=0}^{k-1} \Big(\bigotimes_{i=r_j+1}^{r_{j+1}} C^{(i)} \Big) \to \bigotimes_{i=1}^{r} C^{(i)}$$

представляет собой *изоморфизм комплексов*.

Как и выше, определяется градуированный гомоморфизм степени 0

$$\gamma((C^{(i)}))\colon \bigotimes_{i \in I} H(C^{(i)}) \to H\Big(\bigotimes_{i \in I} C^{(i)} \Big).$$

З а м е ч а н и я. 3. Можно определить тензорное произведение конечного семейства комплексов, не наделяя множество индексов линейным порядком (с. 86, упражнение 3).

4. Предположим, что каждый комплекс $C^{(i)}$ наделен структурой градуированной алгебры, которая совместима с его градуировкой и такова, что $d^{(i)}$ являются *антидифференцированиями* (III, p. 117). Наделим тогда $\underset{i\in I}{\otimes} C^{(i)}$ структурой алгебры *косого тензорного произведения* заданных структур (III, p. 49). Тогда D представляет собою *антидифференцирование*. Действительно, используя ассоциативность тензорного произведения, можно предполагать, что $I = \{1, 2\}$; пусть тогда $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbf{Z}$, $x_1 \in (C^{(1)})_{p_1}$, $y_1 \in (C^{(1)})_{q_1}$, $x_2 \in (C^{(2)})_{p_2}$, $y_2 \in (C^{(r)})_{q_2}$; имеем

$$(D(x_1 \otimes x_2))(y_1 \otimes y_2) + (-1)^{p_1+p_2}(x_1 \otimes x_2)(D(y_1 \otimes y_2)) =$$
$$= (dx_1 \otimes x_2 + (-1)^{p_1} x_1 \otimes dx_2)(y_1 \otimes y_2) +$$
$$+ (-1)^{p_1+p_2}(x_1 \otimes x_2)(dy_1 \otimes y_2 + (-1)^{q_1} y_1 \otimes dy_2) =$$
$$= (-1)^{p_2 q_1}(dx_1)y_1 \otimes x_2 y_2 + (-1)^{p_1+(p_2-1)q_1} x_1 y_1 \otimes (dx_2)y_2 +$$
$$+ (-1)^{p_1+p_2+p_2(q_1-1)} x_1 dy_1 \otimes x_2 y_2 + (-1)^{p_1+p_2+q_1+p_2 q_1} x_1 y_1 \otimes x_2 dy_2 =$$
$$= (-1)^{p_2 q_1}[(dx_1)y_1 + (-1)^{p_1} x_1 dy_1] \otimes x_2 y_2 +$$
$$+ (-1)^{p_1+q_1+p_2 q_1} x_1 y_1 \otimes ((dx_2)y_2 + (-1)^{p_2} x_2 dy_2) =$$
$$= (-1)^{p_2 q_1}[d(x_1 y_1) \otimes x_2 y_2 + (-1)^{p_1+q_1} x_1 y_1 \otimes d(x_2 y_2)] =$$
$$= (-1)^{p_2 q_1} D(x_1 y_1 \otimes x_2 y_2) = D((x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2)).$$

2. Тензорные произведения и гомотопия

Предложение 3. *Пусть* C, C_1 – *два комплекса правых* A-*модулей*, C', C_1' – *два комплекса левых* A-*модулей и*

$$u\colon C \to C_1, \quad v\colon C \to C_1, \quad u'\colon C' \to C_1', \quad v'\colon C' \to C_1'$$

– *морфизмы комплексов.*

а) *Если* u *и* u' *гомотопны соответственно* v *и* v', *то два морфизма* $u \otimes u'$ *и* $v \otimes v'$ *из* $C \otimes_A C'$ *в* $C_1 \otimes_A C_1'$ *гомотопны.*

б) *Если* u *и* u' – *гомотопизмы, то* $u \otimes u'$ – *гомотопизм.*

в) *Если комплекс* C *или* C' *гомотопен нулю, то комплекс* $C \otimes_A C'$ *гомотопен нулю.*

Обозначаем одной и той же буквой d дифференциалы комплексов C, C_1, C', C_1' и буквой D – дифференциалы комплексов $C \otimes_A C'$ и $C_1 \otimes_A C_1'$.

Если морфизм u (соответственно u') гомотопен v (соответственно v'), то существует градуированный гомоморфизм степени 1 $s\colon C \to C_1$ (соответственно $s'\colon C' \to C_1'$), для которого

$$u - v = ds + sd \quad \text{(соответственно } u' - v' = ds' + s'd\text{)}. \tag{2}$$

Пусть $S\colon C \otimes_A C' \to C_1 \otimes_A C_1'$ – однозначно определенный градуированный гомоморфизм степени 1, при котором для $x \in C_p$, $y \in C_q'$, $p, q \in \mathbf{Z}$,

$$S(x \otimes y) = s(x) \otimes u'(y) + (-1)^p v(x) \otimes s'(y). \tag{3}$$

Тогда в предшествующих обозначениях имеем:

$$(DS + SD)(x \otimes y) =$$
$$= D(sx \otimes u'y) + (-1)^p D(vx \otimes s'y) + S(dx \otimes y) + (-1)^p S(x \otimes dy) =$$
$$= dsx \otimes u'y + (-1)^{p+1} sx \otimes du'y + (-1)^p dvx \otimes s'y + vx \otimes ds'y + sdx \otimes u'y +$$
$$+ (-1)^{p-1} vdx \otimes s'y + (-1)^p sx \otimes u'dy + vx \otimes s'dy = (ds + sd)(x) \otimes u'y +$$
$$+ vx \otimes (ds' + s'd)(y) = (ux - vx) \otimes u'y + vx \otimes (u'y - v'y) = ux \otimes u'y - vx \otimes v'y.$$

Это дает, что $DS + SD = u \otimes u' - v \otimes v'$, откуда следует а).

Докажем б). Если u и u' – гомотопизмы, то существуют морфизмы комплексов $\alpha\colon C_1 \to C$ и $\alpha'\colon C_1' \to C'$, для которых морфизмы $u \circ \alpha$, $\alpha \circ u$, $u' \circ \alpha'$, $\alpha' \circ u'$ гомо-

топны соответственно Id_{C_1}, Id_C, $\mathrm{Id}_{C'_1}$ и $\mathrm{Id}_{C'}$. Тогда морфизм $(u \otimes u') \circ (\alpha \otimes \alpha')$, который равен $(u \circ \alpha) \otimes (u' \circ \alpha')$, гомотопен, согласно а), $\mathrm{Id}_{C_1} \otimes \mathrm{Id}_{C'_1} = \mathrm{Id}_{C_1 \otimes C'_1}$, тогда как морфизм $(\alpha \otimes \alpha') \circ (u \otimes u')$ гомотопен $\mathrm{Id}_{C \otimes C'}$, откуда следует б). Наконец, в) следует из утверждения б), примененного к случаю, когда комплекс C_1 или C'_1 нулевой.

Следствие 1. *Пусть* C' *– расщепляемый комплекс левых* A*-модулей, для которого модуль* $H(C')$ *плоский. Для всякого комплекса* C *правых* A*-модулей каноническое отображение*

$$\gamma(C, C'): H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C')$$

биективно.

Согласно определению 6, с. 39, существует гомотопизм u': $C' \to H(C')$. Согласно предложению 3, $1_C \otimes u'$: $C \otimes_A C' \to C \otimes_A H(C')$ – гомотопизм; так как

$$H(1_C \otimes u') \circ \gamma(C, C') = \gamma(C, H(C')) \circ (1_{H(C)} \otimes H(u'))$$

и так как отображения $H(1_C \otimes u')$ и $H(u')$ биективны, то достаточно доказать, что отображение $\gamma(C, H(C'))$ биективно, и мы пришли к случаю, когда комплекс C' плоский и с нулевым дифференциалом. В этом случае канонические точные последовательности

$$\text{(I)} \quad 0 \to Z(C) \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\delta} B(C) \to 0,$$

$$\text{(II)} \quad 0 \to B(C) \xrightarrow{j} Z(C) \xrightarrow{\pi} H(C) \to 0$$

дают точные последовательности:

$$0 \longrightarrow Z(C) \otimes_A C' \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes_A C' \xrightarrow{\delta \otimes 1} B(C) \otimes_A C' \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow B(C) \otimes_A C' \xrightarrow{j \otimes 1} Z(C) \otimes_A C' \xrightarrow{\pi \otimes 1} H(C) \otimes_A C' \longrightarrow 0.$$

Так как $d = i \circ j \circ \delta$, то $D = d \otimes 1_{C'} = (i \otimes 1) \circ (j \otimes 1) \circ (\delta \otimes 1)$, и это показывает, что канонические отображения $Z(C) \otimes_A C' \to Z(C \otimes_A C')$ и $B(C) \otimes_A C' \to B(C \otimes_A C')$ биективны, следовательно, таково же и отображение $\gamma(C, C')$, получаемое посредством перехода к фактормодулям.

Следствие 2. *Пусть* N *– плоский левый* A*-модуль. Для всякого комплекса правых* A*-модулей* C *канонические гомоморфизмы*

$$\gamma_n(C, N): H_n(C) \otimes_A N \to H_n(C \otimes_A N)$$

биективны.

Следствие 3. *Пусть* C' *– комплекс левых* A*-модулей, для которого модули* $B(C)$ *и* $H(C')$ *проективны. Для всякого комплекса правых* A*-модулей* C *отображение* $\gamma(C, C')$ *биективно.*

Действительно, комплекс C' расщепляем (с. 39, пример 4) и модуль $H(C')$ проективен; следовательно, можно применить следствие 1.

Замечания. 1. Используя изоморфизмы коммутирования, можно вывести из следствий 1, 2 и 3 аналогичные утверждения, получаемые обменом ролей двух аргументов тензорных произведений.

2. Мы увидим ниже (с. 84, следствие 4), что заключение следствия 1 остается справедливым, если предполагать, что комплексы C' и $H(C')$ плоские и C' ограничен справа.

3. Тензорное произведение на плоский комплекс, ограниченный справа

Лемма 1. *Пусть* C *– комплекс правых* A*-модулей и* E *– комплекс левых* A*-модулей. Предположим, что* $H(C) = 0$ *и что* E *плоский и ограниченный справа. Тогда* $H(C \otimes_A E) = 0$.

Для $k \in \mathbf{Z}$ пусть $T^{(k)}$ – подкомплекс в $C \otimes_A E$, для которого

$$T_n^{(k)} = \sum_{\substack{p+q=n \\ q \leqslant k}} C_p \otimes_A E_q;$$

Тогда $T^{(k-1)} \subset T^{(k)}$, и имеем точную последовательность комплексов:

$$0 \to T^{(k-1)} \xrightarrow{i_k} T^{(k)} \xrightarrow{\pi} C \otimes_A E_k(-k) \to 0,$$

где i_k — каноническое вложение и где π проектирует указанную выше прямую сумму на ее слагаемое $C_{n-k} \otimes_A E_k = (C \otimes_A E_k(-k))_n$. Согласно следствию 2 выше, имеем: $H(C \otimes_A E_k(-k)) = 0$, следовательно, i_k — гомологизм. Но $T^{(k)} = 0$ для достаточно малого k, поскольку комплекс E ограничен справа; следовательно, индукцией по k заключаем, что $H(T^{(k)}) = 0$ для всякого k. Наконец, канонический морфизм $\varinjlim T^{(k)} \to C \otimes_A E$, очевидно, является изоморфизмом, следовательно, $H(C \otimes_A E) = 0$ (с. 34, предложение 1).

Лемма 2. *Если* u: $C \to C'$ — *морфизм комплексов правых* A-*модулей и* E — *комплекс левых* A-*модулей, то комплексы* $\mathrm{Con}(u) \otimes_A E$ *и* $\mathrm{Con}(u \otimes 1_E)$ *изоморфны.*

По определению, $\mathrm{Con}(u) \otimes_A E$ есть градуированный модуль $(C'(-1) \oplus C) \otimes_A E$, наделенный дифференциалом D, при котором, для $x \in C_p$, $y' \in C'(-1)_p = C'_{p-1}$, $z \in E_q$,

$$D((y', x) \otimes z) = (-dy', dx - u(y')) \otimes z + (-1)^p (y', x) \otimes dz,$$

тогда как $\mathrm{Con}(u \otimes 1_E)$ есть градуированный модуль $(C' \otimes_A E)(-1) \oplus (C \otimes_A E)$, наделенный дифференциалом D_1, при котором для $x \in C_p$, $y' \in C'_{p-1}$, $z \in E_q$

$$D_1(y' \otimes z, x \otimes z) =$$
$$= (-dy' \otimes z - (-1)^{p-1} y' \otimes dz, dx \otimes z + (-1)^p x \otimes dz - u(y') \otimes z) =$$
$$= (-dy' \otimes z, (dx - u(y')) \otimes z) + (-1)^p (y' \otimes dz, x \otimes dz),$$

откуда следует утверждение.

Предложение 4. *Пусть* u: $C \to C'$ — *гомологизм комплексов правых* A-*модулей и* E — *комплекс левых* A-*модулей, плоский и ограниченный справа. Тогда*

$$u \otimes 1_E : C \otimes_A E \to C' \otimes_A E$$

— *гомологизм комплексов* k-*модулей.*

Действительно, согласно следствию на с. 42 u (соответственно $u \otimes 1_E$) — гомологизм, если и только если $H(\mathrm{Con}(u)) = 0$ (соответственно $H(\mathrm{Con}(u \otimes 1_E)) = 0$)).

Нужное заключение получаем теперь посредством лемм 1 и 2.

Замечание. Используя изоморфизмы коммутирования, можно вывести из предыдущих утверждений аналогичные утверждения, получаемые обменом ролей двух аргументов тензорных произведений.

4. Определение и простейшие свойства произведения кручения

Для всякого A-модуля E обозначим через p_E: $L(E) \to E$ его каноническую свободную резольвенту (с. 56).

Определение 1. Пусть M — правый A-модуль и N — левый A-модуль. *Произведением кручения* для M и N называется градуированный k-модуль

$$\mathrm{Tor}^A(M, N) = H(L(M) \otimes_A L(N)). \tag{4}$$

Однородные компоненты для $\mathrm{Tor}^A(M, N)$ обозначаются через

$$\mathrm{Tor}^A_n(M, N) = H_n(L(M) \otimes_A L(N)). \tag{5}$$

Так как комплексы L(M) и L(N) нулевые справа, то

$$\mathrm{Tor}^A_n(M, N) = 0 \text{ при } n < 0. \tag{6}$$

Замечание 1. Ниже (с. 108, предложение 6) мы рассмотрим свойства конечности модулей $\mathrm{Tor}^A(M, N)$. Например, если A — нётерово коммутативное кольцо и если M и N — A-модули конечного типа, то каждый A-модуль $\mathrm{Tor}^A_n(M, N)$ имеет конечный тип.

Пусть f: $M \to M'$ — гомоморфизм правых A-модулей и g: $N \to N'$ — гомоморфизм левых A-модулей, положим $\mathrm{Tor}^A(f, g) = H(L(f) \otimes_A L(g))$; это гомоморфизм градуи-

рованных k-модулей

$$\mathrm{Tor}^A(f,g):\ \mathrm{Tor}^A(M,N)\to\mathrm{Tor}^A(M',N'),$$

однородные компоненты которого обозначаются через

$$\mathrm{Tor}_n^A(f,g):\ \mathrm{Tor}_n^A(M,N)\to\mathrm{Tor}_n^A(M',N').$$

Согласно предложению 1, с. 71, канонический гомоморфизм

$$\gamma_{0,0}:\ H_0(L(M))\otimes_A H_0(L(N))\to H_0(L(M)\otimes_A L(N))$$

биективен; используя изоморфизмы $M\to H_0(L(M))$ и $N\to H_0(L(N))$, получаем отсюда изоморфизм

$$\gamma_{M,N}:\ M\otimes_A N\to\mathrm{Tor}_0^A(M,N), \tag{7}$$

называемый *каноническим*.

Мы всегда будем отождествлять $\mathrm{Tor}_0^A(M,N)$ с $M\otimes_A N$ посредством этого изоморфизма. При этом k-линейное отображение $\mathrm{Tor}_0^A(f,g)$ отождествляется с $f\otimes g$.

Замечание 2. Морфизм комплексов $p_M\otimes p_N$: $L(M)\otimes_A L(N)\to M\otimes_A N$ индуцирует на гомологии степени 0 изоморфизм

$$\gamma_{M,N}^{-1}:\ \mathrm{Tor}_0^A(M,N)\to M\otimes_A N,$$

обратный к $\gamma_{M,N}$.

Имеем: $L(1_M)=1_{L(M)}$, $L(1_N)=1_{L(N)}$, следовательно, переходя к гомологии, получаем:

$$\mathrm{Tor}^A(1_M,1_N)=1_{\mathrm{Tor}^A(M,N)}. \tag{8}$$

Если $f':M'\to M''$ (соответственно $g':N'\to N''$) – гомоморфизм правых (соответственно левых) A-модулей, то $L(g'\circ g)=L(g')\circ L(g)$ и $L(f'\circ f)=L(f')\circ L(f)$, следовательно,

$$\mathrm{Tor}^A(f',f,g'\circ g)=\mathrm{Tor}^A(f',g')\circ\mathrm{Tor}^A(f,g). \tag{9}$$

Рассмотрим морфизмы k-комплексов

$$L(M)\otimes_A N\xleftarrow{1\otimes p_N}L(M)\otimes_A L(N)\xrightarrow{p_M\otimes 1}M\otimes_A L(N)$$

и k-гомоморфизмы, которые они индуцируют в гомологии:

$$H(L(M)\otimes_A N)\xleftarrow{\psi_M(N)}\mathrm{Tor}^A(M,N)\xrightarrow{\bar\psi_N(M)}H(M\otimes_A L(N));$$

согласно предложению 4, с. 75, $1\otimes p_N$ и $p_M\otimes 1$ – гомологизмы. Отсюда:

Предложение 5. *k-гомоморфизмы*

$$\psi_M(N):\ \mathrm{Tor}^A(M,N)\to H(L(M)\otimes_A N),$$

$$\bar\psi_N(M):\ \mathrm{Tor}^A(M,N)\to H(M\otimes_A L(N))$$

биективны.

Следствие. *Если модуль* M *или* N *плоский, то* $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ *при* $i>0$.

Предположим, что модуль N (соответственно M) плоский; тогда $p_M\otimes 1$: $L(M)\otimes_A N\to M\otimes_A N$ (соответственно $1\otimes p_N: M\otimes_A L(N)\to M\otimes_A N$) – гомологизм (с. 75, предложение 4), следовательно, модуль $H_i(L(M)\otimes_A N)$ (соответственно $H_i(M\otimes_A L(N))$ нулевой при $i>0$.

Замечание 3. Если $g:N\to N'$ – гомоморфизм левых A-модулей, то

$$(1_{L(M)}\otimes g)\circ(1_{L(M)}\otimes p_N)=$$

$$=(1_{L(M)}\otimes p_{N'})\circ(1_{L(M)}\otimes L(g)),$$

следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^A(M, N) & \xrightarrow{\psi_M(N)} & H(L(M) \otimes_A N) \\ {\scriptstyle \mathrm{Tor}^A(1, g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(1 \otimes g)} \\ \mathrm{Tor}^A(M, N') & \xrightarrow{\psi_M(N')} & H(L(M) \otimes_A N') \end{array}$$

коммутативна.

Точно так же, если $f\colon M \to M'$ – гомоморфизм правых A-модулей, то имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^A(M, N) & \xrightarrow{\bar{\psi}_N(M)} & H(M \otimes_A L(N)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Tor}^A(f, 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(f \otimes 1)} \\ \mathrm{Tor}^A(M', N) & \xrightarrow{\bar{\psi}_N(M')} & H(M' \otimes_A L(N)). \end{array}$$

Предложение 6. *Отображение* $(f, g) \mapsto \mathrm{Tor}_1^A(f, g)$:

$\mathrm{Hom}_A(M, M') \times \mathrm{Hom}_A(N, N') \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Tor}^A(M, N), \mathrm{Tor}^A(M', N'))$

k-билинейно.

Пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M'), g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(N, N'), \lambda_1, \lambda_2 \in k$. Тогда морфизмы

$\lambda_1(L(f) \otimes g_1) + \lambda_2(L(f) \otimes g_2)$ и $L(f) \otimes (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$

из $L(M) \otimes_A N$ в $L(M') \otimes_A N'$ совпадают; согласно предложению 5 и замечанию 3, имеем, следовательно:

$$\mathrm{Tor}^A(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \mathrm{Tor}^A(f, g_1) + \lambda_2 \mathrm{Tor}^A(f, g_2). \tag{10}$$

Аналогичные рассуждения используются и для отображения $f \mapsto \mathrm{Tor}^A(f, g)$.

Следствие. *Пусть* $\lambda \in k$. *Если элемент* λ *аннулирует* M *или* N, *то он аннулирует и* $\mathrm{Tor}^A(M, N)$.

Действительно,

$$\lambda \cdot 1_{\mathrm{Tor}^A(M,N)} = \mathrm{Tor}^A(\lambda \cdot 1_M, 1_N) = \mathrm{Tor}^A(1_M, \lambda \cdot 1_N).$$

Предложение 7. *Пусть* I *и* J – *два множества,* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ – *семейство правых* A-*модулей,* $(N_\beta)_{\beta \in J}$ – *семейство левых* A-*модулей. Гомоморфизм*

$$\bigoplus_{\alpha \in I, \beta \in J} \mathrm{Tor}^A(M_\alpha, N_\beta) \to \mathrm{Tor}^A\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, \bigoplus_{\beta \in J} N_\beta\right)$$

получаемый из канонических гомоморфизмов $M_\alpha \to \oplus M_\alpha$ *и* $N_\beta \to \oplus N_\beta$, *биективен.*

Достаточно доказать, что для всякого правого A-модуля M (соответственно всякого левого A-модуля N) канонический гомоморфизм

$$\bigoplus_{\beta \in J} \mathrm{Tor}^A(M, N_\beta) \to \mathrm{Tor}^A\left(M, \bigoplus_{\beta \in J} N_\beta\right)$$

(соответственно $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathrm{Tor}^A(M_\alpha, N) \to \mathrm{Tor}^A\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, N\right)$) биективен. Но это следует из предыдущего, из предложения 1, с. 34, и канонических изоморфизмов

$$\bigoplus_\beta (L(M) \otimes_A N_\beta) \to L(M) \otimes_A \left(\bigoplus_\beta N_\beta\right),$$

$$\bigoplus_\alpha (M_\alpha \otimes_A L(N)) \to \left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \otimes_A L(N).$$

Аналогичное рассуждение дает:

Предложение 8. *Пусть* I (*соответственно* J) – *направленное вправо предупорядоченное множество,* $((M_\alpha), (u_{\alpha' \alpha}))$ (*соответственно* $((N_\beta), (v_{\beta' \beta}))$ – *индуктивная система правых* (*соответственно левых*) A-*модулей относительно* I (*со-*

ответственно J). *Гомоморфизм градуированных k-модулей*

$$\varinjlim_{(\alpha,\beta)\in I\times J} \mathrm{Tor}^A(M_\alpha, N_\beta) \to \mathrm{Tor}^A\Big(\varinjlim_{\alpha\in I} M_\alpha, \varinjlim_{\beta\in J} N_\beta\Big),$$

получаемый из канонических A-*гомоморфизмов* $M_\alpha \to \varinjlim M_\alpha$ *и* $N_\beta \to \varinjlim N_\beta$, *биективен.*

В частности, взяв J = I и заметив, что элементы (α, α), $\alpha \in I$, образуют конфинальную часть в I × I, получаем:

Следствие. *Пусть* I – *направленное вправо предупорядоченное множество,* (M_i, u_{ji}) (*соответственно* (N_i, v_{ji})) – *индуктивная система правых* (*соответственно левых*) A-*модулей относительно* I. *Гомоморфизм градуированных k-модулей*

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Tor}^A(M_i, N_i) \to \mathrm{Tor}^A\Big(\varinjlim_{i\in I} M_i, \varinjlim_{i\in I} N_i\Big),$$

получаемый из канонических A-*гомоморфизмов* $M_i \to \varinjlim M_i$ *и* $N_j \to \varinjlim N_j$, *биективен.*

Пусть M – правый A-модуль, N – левый A-модуль, A° – кольцо, противоположное A, M° – левый A°-модуль, определяемый правым A-модулем M, N° – правый A°-модуль, определяемый левым A-модулем N. Имеем: $L(M^\circ) = L(M)^\circ$ и $L(N^\circ) = L(N)^\circ$, откуда следует изоморфизм коммутирования (с. 71, предложение 2):

$$\sigma(L(M), L(N)): L(M) \otimes_A L(N) \to L(N^\circ) \otimes_{A^\circ} L(M^\circ).$$

При переходе к гомологии $\sigma(L(M), L(N))$ индуцирует градуированный изоморфизм степени 0 $\sigma_{M,N}$: $\mathrm{Tor}^A(M, N) \to \mathrm{Tor}^{A^\circ}(N^\circ, M^\circ)$, называемый *изоморфизмом коммутирования для произведений кручения.*

Отметим, что $\sigma_{N^\circ,M^\circ} \circ \sigma_{M,N} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Tor}^A(M,N)}$ и что $\sigma_{M,N}$ индуцирует на членах степени 0 гомоморфизм коммутирования для тензорного произведения. С другой стороны, если f: $M \to M'$ и g: $N \to N'$ – гомоморфизмы A-модулей, то

$$\mathrm{Tor}^{A^\circ}(g, f) \circ \sigma_{M,N} = \sigma_{M',N'} \circ \mathrm{Tor}^A(f, g).$$

5. Связывающие гомоморфизмы и точные последовательности

Пусть M – правый A-модуль. Напомним, что для всякого левого A-модуля N мы определили в предыдущем пункте (с. 76, предложение 5) изоморфизм

$$\psi_M(N): \mathrm{Tor}^A(M, N) \to H(L(M) \otimes_A N).$$

Пусть

$$(\&) \quad 0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \to 0$$

– точная последовательность левых A-модулей; тогда последовательность k-комплексов

$$({}^M\mathscr{E}) \quad 0 \longrightarrow L(M) \otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes u} L(M) \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes v} L(M) \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

является точной (с. 74, лемма 1); пусть

$$\partial({}^M\mathscr{E}): H(L(M) \otimes_A N'') \to H(L(M) \otimes_A N')$$

– соответствующий связывающий гомоморфизм (с. 34).

Определение 2. *Композиция гомоморфизмов*

$$\partial(M, \&) = \psi_M(N')^{-1}\, \partial({}^M\&) \circ \psi_M(N''): \mathrm{Tor}^A(M, N'') \to \mathrm{Tor}^A(M, N')$$

называется связывающим гомоморфизмом для произведений кручения относительно модуля M *и точной последовательности* (&).

Это градуированный k-гомоморфизм степени -1, однородные компоненты которого обозначаются через $\partial_n(M, \&)$: $\mathrm{Tor}_n^A(M, N'') \to \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M, N')$.

Теорема 1. *Неограниченная слева последовательность гомоморфизмом k-модулей*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(1,u)} \mathrm{Tor}_n^A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(1,v)} \mathrm{Tor}_n^A(M, N'')$$

$$\xrightarrow{\partial_n(M,\mathscr{E})} \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_{n-1}^A(1,u)} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^A(1,v)} \mathrm{Tor}_1^A(M, N'')$$

$$\xrightarrow{\partial_1(M,\mathscr{E})} M \otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes u} M \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes v} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

является точной.

Действительно рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{Tor}(M,N') & \xrightarrow{\mathrm{Tor}(1,u)} & \mathrm{Tor}(M,N) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}(1,v)} & \mathrm{Tor}(M,N'') & \xrightarrow{\partial(M,\mathscr{E})} & \mathrm{Tor}(M,N') & \xrightarrow{\mathrm{Tor}(1,u)} & \mathrm{Tor}(M,N) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_M(N')} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_M(N)} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_M(N'')} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_M(N')} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_M(N)} \\
H(L(M)\otimes N') & \xrightarrow{H(1\otimes u)} & H(L(M)\otimes N) & \xrightarrow{H(1\otimes v)} & H(L(M\otimes N'')) & \xrightarrow{\partial(\nu\mathscr{E})} & H(L(M)\otimes N') & \xrightarrow{H(1\otimes u)} & H(L(M)\otimes N)
\end{array}$$

Она коммутативна согласно замечанию 3, с. 76, и определению 2. С другой стороны, нижняя строка точная (с. 35, теорема 1), а все отображения ψ_M биективны (с. 76, предложение 5).

Следствие 1. *Если* $\mathrm{Tor}_1^A(M, N'') = 0$, *то последовательность*

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes u} M \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes v} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

точная.

Следствие 2. *Пусть* $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ – *точная последовательность комплексов левых* A-*модулей и* E – *комплекс правых* A-*модулей. Если* C″ *или* E *плоский, то последовательность*

$$0 \longrightarrow E \otimes_A C' \xrightarrow{1\otimes u} E \otimes_A C \xrightarrow{1\otimes v} E \otimes_A C'' \longrightarrow 0$$

точная.

Действительно, $\mathrm{Tor}_1^A(E, C'') = 0$ согласно следствию предложения 5 (с. 76).

Пример. Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A. Точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{a} \to A_s \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

левых A-модулей порождает точную последовательность произведений кручения, в которой члены $\mathrm{Tor}_i^A(M, A)$ равны нулю при $i > 0$. Из нее получаем изоморфизмы

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^A(M, A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Tor}_i^A(M, \mathfrak{a}), \qquad i > 0,$$

и точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) \to M \otimes_A \mathfrak{a} \to M \otimes_A A \to M \otimes_A A/\mathfrak{a} \to 0;$$

из нее следует, что $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a})$ отождествляется с ядром канонического гомоморфизма $M \otimes_A \mathfrak{a} \to M$.

Например, взяв в качестве M модуль вида $A_d/\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ – правый идеал в A, получаем изоморфизм k-модуля $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{a})$ на $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{b}\mathfrak{a}$.

Предложение 9. *Пусть* f: $M \to M_1$ – *гомоморфизм правых* A-*модулей и*

$$\begin{array}{lccccccc}
(\mathscr{E}) & 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{v} & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g''} \\
(\mathscr{E}_1) & 0 & \longrightarrow & N_1' & \xrightarrow{u_1} & N_1 & \xrightarrow{v_1} & N_1'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

– коммутативная диаграмма с точными строками из гомоморфизмов левых A-*модулей.*

Диаграмма k-модулей

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^A(M, N'') & \xrightarrow{\partial(M, \mathscr{E})} & \mathrm{Tor}^A(M, N') \\ {\scriptstyle \mathrm{Tor}^A(f, g'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}^A(f, g')} \\ \mathrm{Tor}^A(M_1, N_1'') & \xrightarrow{\partial(M_1, \mathscr{E}_1)} & \mathrm{Tor}^A(M_1, N_1') \end{array}$$

коммутативна.

Это следует из предложения 2 (с. 36), примененного к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L(M) \otimes_A N' & \xrightarrow{1 \otimes u} & L(M) \otimes_A N & \xrightarrow{1 \otimes v} & L(M) \otimes_A N'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle L(f) \otimes g'}\downarrow & & {\scriptstyle L(f) \otimes g}\downarrow & & {\scriptstyle L(f) \otimes g''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L(M_1) \otimes_A N_1' & \xrightarrow{1 \otimes u_1} & L(M_1) \otimes_A N_1 & \xrightarrow{1 \otimes v_1} & L(M_1) \otimes_A N_1'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Аналогичным образом, если N – левый A-модуль и

$(\mathscr{F})$ $0 \to M' \xrightarrow{r} M \xrightarrow{s} M'' \to 0$

– точная последовательность правых A-модулей, то определяются *связывающие гомоморфизмы*

$\partial(\mathscr{F}, N)\colon \mathrm{Tor}^A(M'', N) \to \mathrm{Tor}^A(M', N)$, $\partial_n(\mathscr{F}, N)\colon \mathrm{Tor}_n^A(M'', N) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M', N)$

по формуле $\partial(\mathscr{F}, N) = \overline{\psi}_N(M')^{-1} \circ \partial(\mathscr{F}^N) \circ \overline{\psi}_N(M'')$, где $\partial(\mathscr{F}^N)$ – связывающий гомоморфизм из точной последовательности

$(\mathscr{F}^N)$ $0 \to M' \otimes_A L(N) \to M \otimes_A L(N) \to M'' \otimes_A L(N) \to 0,$

получаемой из $\mathscr{F}$, и имеет место

Теорема 1bis. *Неограниченная слева последовательность гомоморфизмов k-модулей*

$$\to \mathrm{Tor}_n^A(M', N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(r, 1)} \mathrm{Tor}_n^A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(s, 1)} \mathrm{Tor}_n^A(M'', N) \xrightarrow{\partial_n(\mathscr{F}, N)} \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M', N)$$

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(M'', N) \xrightarrow{\partial_1(\mathscr{F}, N)} M' \otimes_A N \xrightarrow{r \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{s \otimes 1} M'' \otimes_A N \to 0$$

является точной.

Предоставляем читателю сформулировать и доказать свойства, аналогичные следствиям из теоремы 1 и предложению 9. Кроме того:

Предложение 10. *Обозначим через* $(\mathscr{F}^\circ)$ *точную последовательность левых* A°*-модулей*

$$0 \to M'^\circ \xrightarrow{r} M^\circ \xrightarrow{s} M''^\circ \to 0.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^A(M'', N) & \xrightarrow{\partial(\mathscr{F}, N)} & \mathrm{Tor}^A(M', N) \\ {\scriptstyle \sigma_{M'', N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{M', N}} \\ \mathrm{Tor}^{A^\circ}(N^\circ, M''^\circ) & \xrightarrow{\partial(N^\circ, \mathscr{F}^\circ)} & \mathrm{Tor}^{A^\circ}(N^\circ, M'^\circ) \end{array}$$

коммутативна.

Действительно, это следует из предложения 2 (с. 36), примененного к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \otimes_A L(N) & \xrightarrow{r \otimes 1} & M \otimes_A L(N) & \xrightarrow{s \otimes 1} & M'' \otimes_A L(N) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \sigma(M', L(N))}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma(M, L(N))}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma(M'', L(N))}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L(N^\circ) \otimes_{A^\circ} M'^\circ & \xrightarrow{1 \otimes r} & L(N^\circ) \otimes_{A^\circ} M^\circ & \xrightarrow{1 \otimes s} & L(N^\circ) \otimes_{A^\circ} M''^\circ & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Мы увидим в дальнейшем другие соотношения коммутирования (с. 135, следствие 1).

6. Плоские модули и произведения кручения

Теорема 2. *Пусть* E – *правый* A-*модуль. Следующие условия эквивалентны:*
(i) E – *плоский модуль*;
(ii) *для всякого левого* A-*модуля* F *и всякого целого* $n > 0$

$$\mathrm{Tor}_n^A(E, F) = 0,$$

(iii) *для всякого конечно представимого моногенного левого* A-*модуля* F

$$\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0,$$

(iv) *для всякого левого идеала конечного типа* $\mathfrak{a}$ в A *каноническое отображение* $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ *инъективно*;
(v) *для всякой точной последовательности правых* A-*модулей, имеющей вид*

$$0 \to G \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} E \to 0,$$

и всякого левого A-*модуля* F *последовательность*

$$0 \longrightarrow G \otimes_A F \xrightarrow{v \otimes 1} H \otimes_A F \xrightarrow{w \otimes 1} E \otimes_A F \longrightarrow 0$$

точная.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : это следствие предложения 5, с. 76.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : это тривиально.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : всякий конечно представимый моногенный левый A-модуль изоморфен фактормодулю $A/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ – левый идеал конечного типа; так что условие (iii) эквивалентно (iv) согласно примеру на с. 79.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : согласно предложению 3, с. 12, и теореме 1, с. 79, модуль E плоский, если $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$ для всякого левого A-модуля F. Если (iii) выполняется, то это так, когда модуль F моногенный и конечно представимый. Согласно предложению 7, с. 15, всякий A-модуль (соответственно всякий моногенный A-модуль) представляется как направленный индуктивный предел конечно представимых модулей (соответственно конечно представимых моногенных модулей); мы видим, таким образом, что, согласно предложению 8, с. 77, достаточно доказать, что если $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$, когда модуль F моногенный, то это также верно и когда модуль F конечного типа. Проводим, следовательно, индукцию по числу элементов в системе порождающих $(f_1, \ldots, f_n)$ модуля F; точная последовательность

$$0 \to Af_1 \to F \to F/Af_1 \to 0$$

определяет точную последовательность

$$\mathrm{Tor}_1^A(E, Af_1) \to \mathrm{Tor}_1^A(E, F) \to \mathrm{Tor}_1^A(E, F/Af_1),$$

так что $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$, поскольку $\mathrm{Tor}_1^A(E, Af_1) = 0$ и так как $\mathrm{Tor}_1^A(E, F/Af_1) = 0$ по индуктивному предположению.

(i) $\Rightarrow$ (v) : это следствие 2 из теоремы 1 (с. 79).

(v) $\Rightarrow$ (iii) : точная последовательность (с. 56).

$$0 \to Z_0(E) \xrightarrow{i_E} L_0(E) \xrightarrow{p_E} E \to 0$$

определяет для всякого левого A-модуля F точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(E, F) \longrightarrow Z_0(E) \otimes_A F \xrightarrow{i_E \otimes 1} L_0(E) \otimes_A F \xrightarrow{p_E \otimes 1} E \otimes_A F \longrightarrow 0.$$

Если (v) выполняется, то $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$, откуда следует (iii).

Следствие 1. *Пусть* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ – *точная последовательность правых* A-*модулей. Предположим, что* E″ *плоский. Тогда для того чтобы модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно, чтобы плоским был* E′.

Пусть F – левый A-модуль. Так как $\mathrm{Tor}_i^A(E'', F) = 0$ при $i = 1, 2$ (теорема 2, (i) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (ii)), то имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(E', F) \to \mathrm{Tor}_1^A(E, F) \to 0,$$

откуда следует утверждение (теорема 2, (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)).

Следствие 2. *Пусть* $0 \to E_n \to E_{n-1} \to \ldots \to E_1 \to 0$ – *точная последовательность правых* A*-модулей. Если модуль* E_i плоский для $i = 1, \ldots, n-1$, *то модуль* E_n *плоский.*

7. Формула Кюннета

В этом пункте мы рассматриваем комплекс (C, d) правых A-модулей и комплекс (C', d') левых A-модулей. Рассмотрим канонические точные последовательности:

(I) $0 \to Z(C) \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\delta} B(C)(-1) \to 0,$

(II) $0 \to B(C) \xrightarrow{i} Z(C) \xrightarrow{p} H(C) \to 0;$

из δ получаем k-гомоморфизм

$H(\delta \otimes 1)$: $H(C \otimes_A C') \to H(B(C) \otimes_A C')(-1)$;

из (II) получаем связывающий гомоморфизм

$\partial(\mathrm{II}, H(C'))$: $\mathrm{Tor}_1^A(H(C), H(C')) \to B(C) \otimes_A H(C')$;

если наделить $\mathrm{Tor}_1^A(H(C), H(C'))$ градуировкой, однородная компонента степени n которой представляет собой $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_1^A(H_p(C), H_q(C'))$, то этот связывающий гомоморфизм будет градуированным степени 0. Мы располагаем также каноническим гомоморфизмом (с. 71)

$\gamma(B(C), C')$: $B(C) \otimes_A H(C') \to H(B(C) \otimes_A C')$.

В этих обозначениях имеем:

Теорема 3. *Предположим, что* A*-модули* $B(C)$ *и* $Z(C)$ *плоские. Существует единственный гомоморфизм степени* -1 *градуированных* k*-модулей*

α: $H(C \otimes_A C') \to \mathrm{Tor}_1^A(H(C), H(C'))$,

при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(C \otimes_A C') & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Tor}_1^A(H(C), H(C'))(-1) \\ \downarrow{\scriptstyle H(\delta \otimes 1)} & & \downarrow{\scriptstyle \partial(\mathrm{II}, H(C'))} \\ H(B(C) \otimes_A C')(-1) & \xleftarrow{\gamma(B(C), C')} & (B(C) \otimes_A H(C'))(-1). \end{array}$$

Последовательность градуированных k*-модулей*

$$0 \longrightarrow H(C) \otimes_A H(C') \xrightarrow{\gamma(C, C')} H(C \otimes_A C') \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Tor}_1^A(H(C), H(C'))(-1) \longrightarrow 0$$

точна.

Имеем, следовательно, для каждого n точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C) \otimes_A H_q(C') \xrightarrow{\gamma_n(C, C')} H_n(C \otimes_A C') \\ \xrightarrow{\alpha_n} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_p(C), H_q(C')) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Положим для простоты $B = B(C)$, $Z = Z(C)$, $H = H(C)$ и $H' = H(C')$.

Так как модуль B плоский, получаем из (1) точную последовательность (с. 79, следствие 2)

$$0 \longrightarrow Z \otimes_A C' \xrightarrow{j \otimes 1} C \otimes_A C' \xrightarrow{\delta \otimes 1} (B \otimes_A C')(-1) \longrightarrow 0. \tag{12}$$

Лемма 3. *Связывающий гомоморфизм* $H(B \otimes_A C') \to H(Z \otimes_A C')$, *соответствующий точной последовательности* (12), *равен* $H(i \otimes 1)$.

Действительно, пусть $a \in Z(B \otimes_A C')$; так как модуль B плоский, то a принадлежит образу $B \otimes_A Z(C')$, следовательно, записывается в виде $\sum_\lambda da_\lambda \otimes b_\lambda$, где $a_\lambda \in C$, $b_\lambda \in C'$,

$db_\lambda = 0$. Образ класса a при искомом гомоморфизме есть, по определению, класс элемента $D(\Sigma a_\lambda \otimes b_\lambda) = \Sigma da_\lambda \otimes b_\lambda = (i \otimes 1)(a)$, откуда следует лемма.

Гомологическая точная последовательность, ассоциированная с (12), имеет, следовательно, вид:

$$H(B \otimes_A C') \xrightarrow{H(i\otimes 1)} H(Z \otimes_A C') \xrightarrow{H(j\otimes 1)} H(C \otimes_A C') \xrightarrow{H(\delta\otimes 1)} H(B \otimes_A C')(-1) \xrightarrow{H(i\otimes 1)} H(Z \otimes_A C')(-1).$$

Кроме того, так как модуль Z плоский, получаем из (II) точную последовательность градуированных k-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(H, H') \xrightarrow{\partial(II,H')} B \otimes_A H' \xrightarrow{i\otimes 1} Z \otimes_A H' \xrightarrow{p\otimes 1} H \otimes_A H' \longrightarrow 0;$$

наконец, мы располагаем каноническими гомоморфизмами из п. 1:

$\gamma_B = \gamma(B, C')$: $B \otimes_A H' \to H(B \otimes_A C')$,

$\gamma_Z = \gamma(Z, C')$: $Z \otimes_A H' \to H(Z \otimes_A C')$,

$\gamma_C = \gamma(C, C')$: $H \otimes_A H' \to H(C \otimes_A C')$,

откуда получается диаграмма градуированных k-модулей с *точными строками*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
B\otimes H' & \xrightarrow{i\otimes 1} & Z\otimes H' & \xrightarrow{p\otimes 1} & H\otimes H' & \longrightarrow & 0 & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_B} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_C} & & & & & & \\
H(B\otimes C') & \xrightarrow{H(i\otimes 1)} & H(Z\otimes C') & \xrightarrow{H(j\otimes 1)} & H(C\otimes C') & \xrightarrow{H(\delta\otimes 1)} & H(B\otimes C')(-1) & \xrightarrow{H(i\otimes 1)} & H(Z\otimes C')(-1) & & \\
 & & & & & & \uparrow{\scriptstyle \gamma_B} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma_Z} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^A(H, H')(-1) & \xrightarrow{\partial(II,H')} & (B\otimes H')(-1) & \xrightarrow{i\otimes 1} & (Z\otimes H')(-1), & & & &
\end{array}$$

которая *коммутативна* по определению гомоморфизмов γ. Но так как комплексы B и Z расщепляемые и плоские, отображения γ_B и γ_Z биективны (с. 74, следствие 1). Из этого выводим, с одной стороны, что отображение γ_C инъективно и его образ равен $\mathrm{Ker}\, H(\delta \otimes 1)$, а с другой стороны, что отображение $\gamma_B \circ \partial(II, H')$ инъективно и его образ равен $\mathrm{Im}\, H(\delta \otimes 1)$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если модули* B(C) *и* Z(C) *плоские, то для всякого левого* A*-модуля* N *и всякого целого* n *имеет место точная последовательность*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes_A N \xrightarrow{\gamma_n} H_n(C \otimes_A N) \xrightarrow{\alpha_n} \mathrm{Tor}_1^A(H_{n-1}(C), N) \longrightarrow 0. \qquad (13)$$

Следствие 2. *Предположим, что модули* B(C) *и* B(C′) *проективны и модуль* Z(C) *плоский. Тогда последовательности* k*-модулей* (11) *и* (13) *точные и расщепляемые.*

Это вытекает из теоремы и следующей леммы:

Лемма 4. *Если модули* B(C) *и* B(C′) *проективны, то канонический гомоморфизм*

$\gamma(C, C')$: $H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C')$

обладает k*-линейной ретракцией.*

Действительно, согласно замечанию б), с. 40, существуют гомологизмы $\varphi: C \to H(C)$ и $\varphi': C' \to H(C')$, для которых $H(\varphi) = 1_{H(C)}$ и $H(\varphi') = 1_{H(C')}$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
H(C)\otimes_A H(C') & \xrightarrow{\gamma(C,C')} & H(C\otimes_A C') \\
\downarrow{\scriptstyle H(\varphi)\otimes H(\varphi')} & & \downarrow{\scriptstyle H(\varphi\otimes\varphi')} \\
H(C)\otimes_A H(C') & \xrightarrow{\gamma(H(C),H(C'))} & H(C)\otimes_A H(C')
\end{array}$$

$H(\varphi) \otimes H(\varphi')$ и $\gamma(H(C), H(C'))$ – тождественные отображения, откуда следует утверждение.

Следствие 3 ("формула универсальных коэффициентов"). *Предположим, что* A *– кольцо главных идеалов. Если комплексы* C *и* C′ *свободные, то последователь-*

ности A-*модулей* (11) *точные и расщепляемые*; *если комплекс* C *свободен, то последовательности* A-*модулей* (13) *точные и расщепляемые для всякого* A-*модуля* N.

Действительно, $B(C)$, $Z(C)$ и $B(C')$ – подмодули свободных модулей C, C, C', следовательно, свободны (VII, § 3, cor. 2; Алгебра, VII, с. 43, теорема 1), и применимо следствие 2.

Следствие 4 ("формула Кюннета"). *Предположим, что комплекс* C *ограничен справа,* C *и* $H(C)$ *– плоские*; *тогда канонический гомоморфизм*

$$\gamma(C', C)\colon\ H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C')$$

биективен.

Согласно теореме, достаточно доказать, что модули $B(C)$ и $Z(C)$ плоские. Но имеют место точные последовательности

$$0 \to B_n(C) \to Z_n(C) \to H_n(C) \to 0,$$

$$0 \to Z_n(C) \to C_n \to B_{n-1}(C) \to 0,$$

откуда, согласно следствию 1, с. 81, импликации: ($B_{n-1}(C)$ плоский) $\Rightarrow$ ($Z_n(C)$ плоский) $\Rightarrow$ ($B_n(C)$ плоский); завершаем доказательство, замечая, что $B_n(C) = 0$ при достаточно малом n.

Следствие 5. *Пусть* $u\colon C \to C'$ *– гомологизм комплексов правых* A-*модулей, плоских и ограниченных справа. Для всякого комплекса* E *левых* A-*модулей морфизм* $u \otimes 1_E\colon C \otimes_A E \to C' \otimes_A E$ *является гомологизмом.*

Действительно, комплекс $\mathrm{Con}(u)$ плоский, ограниченный справа и с нулевой гомологией; следовательно, $H(\mathrm{Con}(u) \otimes_A E) = 0$ согласно следствию 4, следовательно, $H(\mathrm{Con}(u \otimes 1_E)) = 0$ (с. 75, лемма 2), и $u \otimes 1_E$ – гомологизм.

8. Ограниченные плоские комплексы над нётеровым кольцом

Предложение 11. *Предположим, что кольцо* A *нётерово слева, и пусть* C *– ограниченный плоский комплекс левых* A-*модулей, для которого* $H(C)$ *–* A-*модуль конечного типа. Пусть* a *и* b *– два таких целых числа, что* $a \leqslant b$ *и* $H_n(C) = 0$ *при* $n < a$, $C_n = 0$ *при* $n > b$. *Существуют комплекс* P *левых* A-*модулей, в котором* P_n *– проективный модуль конечного типа при каждом* n *и* $P_n = 0$ *при* $n \notin [a, b]$, *и гомологизм* $u\colon P \to C$. *Кроме того, для всякого комплекса* E *правых* A-*модулей гомоморфизм*

$$H(1_E \otimes u)\colon\ H(E \otimes_A P) \to H(E \otimes_A C)$$

биективен.

Согласно предложению 7, с. 59, существуют комплекс (L, d), в котором модуль L_n свободен и конечного типа при каждом n и нулевой при $n < a$, и гомологизм f: $L \to C$. Пусть P – факторкомплекс L/L', где $L'_n = 0$ при $n < b$, $L'_n = L_n$ при $n > b$, $L'_b = B_b(L)$. Так как $C_n = 0$ при $n > b$, то $f(L') = 0$, следовательно, отображение f факторизуется через морфизм комплексов u: $P \to C$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & L_{b+1} & \xrightarrow{d_{b+1}} & L_b & \xrightarrow{d_b} & L_{b-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
& 0 & \longrightarrow & P_b & \longrightarrow & P_{b-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_b} & & \downarrow{\scriptstyle u_{b-1}} & \\
& 0 & \longrightarrow & C_b & \longrightarrow & C_{b-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Так как f – гомологизм, то $H(\mathrm{Con}(f)) = 0$, откуда получаем точную последовательность

$$\cdots \to L_{b+1} \xrightarrow{d_{b+1}} L_b \to L_{b-1} \oplus C_b \to L_{b-2} \oplus C_{b-1} \to \cdots$$

Имеем, следовательно, точную последовательность

$$0 \to P_b \to L_{b-1} \oplus C_b \to L_{b-2} \oplus C_{b-1} \to \cdots$$

Она показывает, с одной стороны, что конус морфизма u имеет нулевую гомологию

и, следовательно, u — гомологизм, а с другой стороны, что модуль P_b *плоский* (с. 82, следствие 2); так как модуль P_b конечного типа как фактормодуль модуля L_{b+1}, то он проективен (с. 17, следствие). Пара (P, u) отвечает, таким образом, требуемым условиям. Последнее утверждение следует из следствия 5, с. 84.

*Пример. Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, X — собственная плоская A-схема, $\mathscr{F}$ — когерентный $\mathscr{O}_X$-модуль, плоский над A. Существует такой ограниченный комплекс P, образованный проективными A-модулями *конечного типа*, что для всякого A-модуля M модуль $H(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$ естественным образом отождествляется с $H(P \otimes_A M)$. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ — покрытие X конечным числом аффинных открытых множеств, $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ — соответствующий комплекс Чеха. Показывается, что модуль $H^i(\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$ изоморфен A-модулю $H^i(X, \mathscr{F})$ и что этот последний имеет конечный тип; кроме того, для всякого A-модуля M комплекс $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \otimes_A M$ изоморфен комплексу $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes_A M)$. Применяя предложение 11 к комплексу $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (который ограничен), получаем искомый комплекс P.

Для всякой точки y из Spec(A) обозначим через $k(y)$ поле вычетов кольца A в y, через $X_y = X \otimes_A k(y)$ — слой X над y, $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_A k(y)$, и положим $h^p(y) = \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$ для $p \geqslant 0$. Из существования комплекса P легко выводятся следующие результаты:

(i) функция h^p полунепрерывна сверху на Spec(A);

(ii) функция $\sum_{p \geqslant 0} (-1)^p h^p$ локально постоянна на Spec(A). *

9. Обобщение на комплексы мультимодулей

Пусть B и B′ — два кольца, C — комплекс (B, A)-бимодулей, C′ — комплекс (A, B′)-бимодулей (с. 45); тогда $(C \otimes_A C', D)$ (с. 71) — комплекс (B, B′)-бимодулей и канонический гомоморфизм

$$\gamma\colon\ H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C')$$

совместим со структурами (B, B′)-бимодулей на обоих членах.

Если B″ — третье кольцо и C″ — комплекс (B′, B″)-бимодулей, то канонический гомоморфизм (II, p. 64, prop. 8)

$$(C \otimes_A C') \otimes_{B'} C'' \to C \otimes_A (C' \otimes_{B'} C'')$$

представляет собой изоморфизм комплексов (B, B″)-бимодулей.

Для дальнейших обобщений мы предоставляем читателю развить теорию тензорных произведений линейно упорядоченных конечных семейств *комплексов мультимодулей* по образцу п.1 (с. 72) и II, p. 65–72 (изоморфизм ассоциативности, коммутативности, ...).

Пусть B и B′ — два кольца, $k^{(B)}$ и $k^{(B')}$ — моноидные алгебры мультипликативных моноидов колец B и B′ соответственно, M — (B, A)-бимодуль, N — (A, B′)-бимодуль; тогда согласно (8), с. 57, L(M) представляет собой комплекс $(k^{(B)}, A)$-бимодулей, а L(N) — комплекс $(A, k^{(B')})$-бимодулей, и, следовательно, $L(M) \otimes_A L(N)$ — комплекс $(k^{(B)}, k^{(B')})$-бимодулей, так что $\mathrm{Tor}^A(M, N)$ естественным образом наделяется структурой градуированного $(k^{(B)}, k^{(B')})$-бимодуля, которая посредством канонических гомоморфизмов $k^{(B)} \to B$, $k^{(B')} \to B'$ индуцирует на $\mathrm{Tor}^A(M, N)$ структуру (B, B′)-бимодуля (ср. с. 57, замечание); на члене степени 0 эта структура совпадает со структурой (B, B′)-бимодуля на $M \otimes_A N$.

Если $\lambda \in B$, $\lambda' \in B'$ и если обозначить через $\lambda_M, \lambda'_N, \lambda_T, \lambda'_T$ гомотетии $x \mapsto \lambda x$, $y \mapsto y\lambda'$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto z\lambda'$ на M, N, $\mathrm{Tor}^A(M, N)$, $\mathrm{Tor}^A(M, N)$ соответственно, то

$$\lambda_T = \mathrm{Tor}^A(\lambda_M, 1_N), \quad \lambda'_T = \mathrm{Tor}^A(1_M, \lambda'_N),$$

и это дает другое описание структуры бимодуля на $\mathrm{Tor}^A(M, N)$.

Мы предоставляем читателю обобщить п.5 и 7 на случай комплексов мультимодулей.

Упражнения

1. Обозначим через B кольцо $A(\epsilon)$ (с. 32); пусть C — комплекс (B, B)-бимодулей, для которого $C_n = B$ при всяком $n \in \mathbf{Z}$, $d(x) = \epsilon x$ при любом $x \in C$. Показать, что комплекс C имеет нулевую гомологию, но что модуль $H_n(C \otimes_B C)$ изоморфен A при всяком $n \in \mathbf{Z}$. Вывести отсюда, что нельзя устранить предположение "комплекс E ограничен справа" в лемме 1 и предложении 4, с. 74–75.

2. Пусть ρ: A → B – гомоморфизм колец, M – A-модуль. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) $\mathrm{Tor}_1^A(\rho_*(P), M) = 0$ для всякого правого B-модуля P.

β) $\mathrm{Tor}_1^A(\rho_*(P), M) = 0$ для всякого *моногенного* правого B-модуля P.

γ) B-модуль $B \otimes_A M$ плоский и $\mathrm{Tor}_1^A(B, M) = 0$.

(Чтобы увидеть, что $\gamma) \Rightarrow \alpha)$, рассмотреть точную последовательность $0 \to R \to L \to P \to 0$ правых B-модулей, в которой L свободен.)

3. Предположим, что кольцо A *коммутативно*. Пусть I – конечное множество и $(C^{(i)}, d^{(i)})$, $i \in I$, – семейство комплексов A-модулей.

а) Наделим тензорное произведение $\bigotimes_{i \in I} C^{(i)}$ градуировкой по типу $\mathbf{Z}^I$ и A-эндоморфизмами $d_i = \bigotimes_{j \in I} d_i^{(j)}$, где $d_i^{(j)} = 1_{C^{(j)}}$ при $j \neq i$ и $d_i^{(i)} = d^{(i)}$. Показать, что таким способом мы получаем I-предкомплекс (упражнение 13, с. 49); ассоциированный I-комплекс называется *тензорным произведением* комплексов $C^{(i)}$. Комплекс, ассоциированный с этим I-комплексом, также называется *тензорным произведением* комплексов $C^{(i)}$.

б) Показать, что выбор линейного порядка на I позволяет определить изоморфизм комплекса, являющегося тензорным произведением комплексов $C^{(i)}$, на комплекс, определенный на с. 72.

4. Пусть $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал в A. Пусть M – A-модуль, для которого $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ и $(A/\mathfrak{a})$-модуль $M/\mathfrak{a}M$ *проективен*.

а) Предположим, что модуль M конечно представим и $\mathfrak{a}$ содержится в радикале кольца A или что $\mathfrak{a}$ нильпотентен. Показать, что M проективен (использовать VIII, § 8, n° 3, сог. 3).

б) Предположим, что модуль M конечного типа, что $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$ и что $(A/\mathfrak{a})$-модуль $M/\mathfrak{a}M$ свободен. Показать, что A-модуль M свободен.

в) Дать пример локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и неплоского A-модуля конечного типа M, для которого $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$.

5. Предположим, что существует (унитарный) гомоморфизм k-алгебр π: A → k, который наделяет k структурой A-модуля. Рассмотрим стандартную резольвенту B(A, k) (с. 62); для $n \geqslant 0$ отождествим $B_n(A, k)$ с $A \otimes_k A^{\otimes n}$ и обозначим через $a[a_1, \ldots, a_n]$ элемент $a \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ из $A \otimes_k A^{\otimes n}$.

а) Показать, что комплекс $B(A, k) \otimes_k B(A, k)$ определяет резольвенту $(A \otimes_k A)$-модуля k. Показать, что $(A \otimes_k A)$-линейный гомоморфизм

$$g\colon B(A \otimes_k A, k) \to B(A, k) \otimes_k B(A, k),$$

при котором

$$g([x_1 \otimes y_1, \ldots, x_n \otimes y_n]) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \pi(x_{p+1} \ldots x_n)[x_1, \ldots, x_p] \otimes y_1 \ldots y_p[y_{p+1}, \ldots, y_n]$$

для $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$, представляет собою морфизм резольвент.

б) Предположим, что кольцо A коммутативно. Показать, что на B(A, k) существует структура градуированной A-алгебры, относительно которой для $x_1, \ldots, x_n \in A$:

$$[x_1, \ldots, x_p][x_{p+1}, \ldots, x_n] = \sum_{\sigma \in M_{p,n}} \epsilon(\sigma)[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}],$$

где $M_{p,n}$ – подмножество в $\mathfrak{S}_n$, образованное перестановками σ, для которых $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(n)$.

Показать, что тогда B(A, k) представляет собой градуированную дифференциальную A-алгебру (с. 69, упражнение 18).

6. Пусть P – плоский комплекс правых A-модулей. Для всякого A-модуля M и всякого целого j положим

$$T_j^P(M) = H_j(P \otimes_A M);$$

если u: M → N – A-гомоморфизм, то обозначим через $T_j^P(u)$ k-гомоморфизм $H_j(1_P \otimes u)$.

а) Пусть r – целое число. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Для всякого вложения u: M′ → M отображение $T_r^P(u)$ инъективно.

β) Для всякой сюръекции v: M → M″ отображение $T_{r+1}^P(v)$ сюръективно.

γ) Правый A-модуль $P_r/B_r(P)$ плоский.

δ) Существуют плоский комплекс правых A-модулей P′, в котором дифференциал d_{r+1} нулевой, и для всякого A-модуля M и всякого целого i такой k-изоморфизм $\varphi_i^M\colon T_i^P(M) \to T_i^{P'}(M)$, что

$$T_i^{P'}(u) \circ \varphi_i^M = \varphi_i^N \circ T_i^P(u)$$

для всякого A-гомоморфизма $u\colon M \to N$.

(Чтобы доказать, что γ) влечет δ), определить P′, положив $P'_{r+1} = Z_{r+1}(P)$ и $P'_r = P_r/B_r(P)$.)

б) Предположим дополнительно, что кольцо A нётерово и что A-модули P_i конечного типа. Показать, что условия из а) эквивалентны следующему условию:

ε) Существуют A-модуль Q и для всякого A-модуля M такой k-изоморфизм $\psi^M\colon T_r^P(M) \to \mathrm{Hom}_A(Q, M)$, что $\psi^N \circ T_r^P(u) = \mathrm{Hom}(1, u) \circ \psi^M$ для всякого A-гомоморфизма $u\colon M \to N$.

(Чтобы доказать, что δ) влечет ε), перейти к случаю, когда $d_{r+1} = 0$, и взять в качестве Q модуль, сопряженный к $Z_r(P)$.)

в) Показать, что результат пункта б) остается справедливым в предположении, что кольцо A нётерово, модули $H_i(P)$ конечного типа при всяком i и $H_i(P) = 0$ при $i < i_0$ (использовать предложение 10, с. 61).

7. Пусть C – комплекс правых A-модулей и M – левый A-модуль. Произведением кручения C и M называется градуированный k-модуль $\mathcal{T}or^A(C, M) = H(C \otimes_A L(M))$. Если $f\colon C \to C'$ – морфизм комплексов и $g\colon M \to M'$ – гомоморфизм A-модулей, то обозначим $\mathcal{T}or^A(f, g) = H(f \otimes L(g))$.

а) Если $f\colon C \to C'$ – гомологизм, то $\mathcal{T}or^A(f, 1)$ – изоморфизм; если C – плоский и ограничен справа, то градуированный k-модуль $\mathcal{T}or^A(C, M)$ изоморфен $H(C \otimes_A M)$.

б) Если $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ – точная последовательность комплексов правых A-модулей и если M – A-модуль, то показать, что существует точная последовательность

$$\ldots \to \mathcal{T}or_n^A(C', M) \to \mathcal{T}or_n^A(C, M) \to \mathcal{T}or_n^A(C'', M) \to \mathcal{T}or_{n-1}^A(C', M) \to \ldots$$

Если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность A-модулей, то показать, что существует точная последовательность

$$\ldots \to \mathcal{T}or_n^A(C, M') \to \mathcal{T}or_n^A(C, M) \to \mathcal{T}or_n^A(C, M'') \to \mathcal{T}or_{n-1}^A(C, M') \to \ldots$$

(Заметить, что существует гомотопизм комплекса L(M″) на конус L(i).)

в) Показать, что существует спектральная последовательность 'E (с. 49–51, упражнения 14–17), сходящаяся к $\mathcal{T}or^A(C, M)$, для которой $'E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^A(H_q(C), M)$. Если комплекс C ограничен справа, показать, что существует спектральная последовательность ''E, сходящаяся к $\mathcal{T}or^A(C, M)$, для которой $''E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{Tor}_q^A(C, M))$ (рассмотреть бикомплекс $C \otimes_A L(M)$).

8. Пусть A, B – две k-алгебры (ассоциативные и унитарные), M – правый A-модуль, P – левый B-модуль и N – (A, B)-бимодуль.

а) Показать, что существуют две спектральные последовательности k-модулей ^1E и ^2E, сходящиеся к одному и тому же градуированному k-модулю, для которых

$$^1E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^A(M, \mathrm{Tor}_q^B(N, P)); \quad ^2E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^B(\mathrm{Tor}_q^A(M, N), P).$$

(Рассмотреть бикомплекс $L(M) \otimes_A (N \otimes_B L(P))$.)

б) Если N – плоский B-модуль, то показать, что спектральная последовательность ^2E сходится к $\mathrm{Tor}^A(M, N \otimes_B P)$. Если N – плоский A-модуль, то последовательность ^1E сходится к $\mathrm{Tor}^B(M \otimes_A N, P)$.

в) Пусть $\rho\colon A \to B$ – гомоморфизм k-алгебр. Получить из б) спектральную последовательность E, сходящуюся к $\mathrm{Tor}^A(M, P)$, для которой

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^B(\mathrm{Tor}_q^A(M, B), P).$$

9. Пусть P – комплекс правых A-модулей, Q – комплекс левых A-модулей. Предположим, или что P и Q ограничены справа, или что существует такое целое число d, что всякий левый или правый A-модуль обладает проективной резольвентой длины $\leqslant d$.

а) Показать, что существуют две спектральных последовательности (с. 49, упражнение 14) 'E и ''E, сходящиеся к одному и тому же градуированному k-модулю, для которых

$$'E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{Tor}_q^A(P, Q)); \quad ''E^2_{p,q} = \bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Tor}_p^A(H_{q'}(P), H_{q''}(Q))$$

(где $\mathrm{Tor}_q^A(P, Q)$ обозначает комплекс, ассоциированный с бикомплексом $\bigoplus_{r,s} \mathrm{Tor}_q^A(P_r, Q_s)$).

(Рассмотреть проективные резольвенты (с. 69, упражнение 17) $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ для P и Q и бикомплекс C, в котором $C_{p,q} = \bigoplus_{\substack{p'+p''=p \\ q'+q''=q}} (\mathscr{P}_{p',q'} \otimes_A \mathscr{Q}_{p'',q''})$.)

б) Если P плоский, то показать, что спектральная последовательность $''E$ сходится к $H(P \otimes_A Q)$. Если $H(P)$ плоский, то последовательность $'E$ сходится к $H(P) \otimes_A H(Q)$.

§ 5. Модули расширений

Сохраняются общие соглашения из параграфа 4. *Принимается также, что если явно не оговорено противное, то все рассматриваемые модули – это левые модули, все рассматриваемые комплексы – это комплексы левых модулей.*

1. Комплексы гомоморфизмов

Пусть (C, d) и (C', d') – два A-комплекса. Рассмотрим градуированный k-модуль $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ (II, p. 174, 175): для $n \in \mathbf{Z}$ $\mathrm{Homgr}_A(C, C')_n$ есть k-модуль градуированных A-линейных отображений степени n из C в C'; иначе говоря, $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ канонически отождествляется с k-модулем

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \prod_{p \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_A(C_p, C'_{p+n}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_A(C_p, C'^q).$$

Определим k-линейные отображения

$$D_n: \mathrm{Homgr}_A(C, C')_n \to \mathrm{Homgr}_A(C, C')_{n-1}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

по формуле

$$D_n(f) = d' \circ f - (-1)^n f \circ d; \tag{1}$$

имеем:

$$D_{n-1} \circ D_n(f) = D_{n-1}(d' \circ f - (-1)^n f \circ d) =$$

$$= d' \circ d' \circ f - (-1)^n d' \circ f \circ d - (-1)^{n-1} d' \circ f \circ d - f \circ d \circ d = 0.$$

Тогда $(\mathrm{Homgr}_A(C, C'), D)$ представляет собой комплекс k-модулей, называемый *комплексом гомоморфизмов из* C *в* C'.

Например, комплекс $\mathrm{Homgr}_A(A, C')$ канонически отождествляется с C'. Отметим также, что $\mathrm{Homgr}_A(C, C')(n) = \mathrm{Homgr}_A(C, C'(n))$ для всякого $n \in \mathbf{Z}$.

Элементы из $Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ – это градуированные гомоморфизмы f (нижней) степени n из C в C', удовлетворяющие условию $d' \circ f = (-1)^n f \circ d$, т.е. морфизмы комплекса C в $C'(n)$ или, если угодно, $C(p)$ в $C'(p+n)$ для любого фиксированного p. Их называют *морфизмами комплексов* (нижней) *степени* n *из* C *в* C'; если $f, g \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ и $s \in \mathrm{Homgr}_A(C, C')_{n+1}$, то условие $g - f = Ds$ означает, что s – гомотопия, связывающая морфизмы f и g из C в $C'(n)$, так что $H_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ *представляет собой* k*-модуль гомотопических классов морфизмов* (*нижней*) *степени* n *из* C *в* C'.

Пусть $\alpha \in H_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ и $p \in \mathbf{Z}$. Представим класс α элементом $f \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$; тогда f – морфизм комплексов из C в $C'(n)$, следовательно, $H_p(f)$ есть гомоморфизм из $H_p(C)$ в $H_p(C'(n)) = H_{p+n}(C')$; так как $H_p(f)$ зависит только от гомотопического класса α морфизма f (с. 37, предложение 3), то получаем отсюда канонический гомоморфизм k-модулей

$$H_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Him}_A(H_p(C), H_{n+p}(C'))$$

и, следовательно, *градуированное* k*-линейное отображение степени* 0, называемое

каноническим:

$$\lambda(C, C'):\ H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C')).$$

Однородные компоненты отображения $\lambda(C, C')$ часто будут обозначаться через

$$\lambda^n(C, C'):\ H^n(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_A(H_p(C), H^q(C')).$$

Предложение 1. *Если комплекс* C *нулевой справа, а* C′ *нулевой слева, то комплекс* $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ *нулевой слева и каноническое* k*-линейное отображение*

$$\lambda^0(C, C'):\ H^0(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Hom}_A(H_0(C), H^0(C'))$$

биективно.

Имеем точные последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(C') \xrightarrow{i} C'^0 \xrightarrow{d'^0} C'^1,$$

$$C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{p} H_0(C) \longrightarrow 0.$$

С другой стороны, $\mathrm{Homgr}^0_A(C, C')$ отождествляется с $\mathrm{Hom}_A(C_0, C'^0)$, $Z^0(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ отождествляется тогда с множеством гомоморфизмов f: $C_0 \to C'^0$, для которых $d'^0 \circ f = 0$, $f \circ d_1 = 0$; модуль $B^0(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ нулевой; наконец, отображение λ^0 сопоставляет классу f по модулю $\{0\}$ гомоморфизм φ: $H_0(C) \to H^0(C')$, для которого $f = i \circ \varphi \circ p$, что и доказывает предложение.

Пусть u: $\widetilde{C} \to C$ и u': $C' \to \widetilde{C}'$ – морфизмы комплексов; тогда канонический гомоморфизм $\mathrm{Homgr}_A(u, u')$: $\mathrm{Homgr}_A(C, C') \to \mathrm{Homgr}_A(\widetilde{C}, \widetilde{C}')$, определяемый по правилу $f \mapsto u' \circ f \circ u$, представляет собой морфизм комплексов, как следует немедленно из формулы (1). Кроме того, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) & \xrightarrow{\lambda(C, C')} & \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C')) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H(\mathrm{Homgr}_A(u, u'))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Homgr}_A(H(u), H(u'))} \\ H(\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{C}, \widetilde{C}')) & \xrightarrow{\lambda(\widetilde{C}, \widetilde{C}')} & \mathrm{Homgr}_A(H(\widetilde{C}), H(\widetilde{C}')). \end{array}$$

Предложение 2. а) *Пусть* $C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C''$ *– точная последовательность* A*-комплексов*, P *– проективный комплекс*, E *– инъективный комплекс* (с. 31). *Тогда последовательности*

$$\mathrm{Homgr}_A(P, C') \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1, u)} \mathrm{Homgr}_A(P, C) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1, v)} \mathrm{Homgr}_A(P, C'')$$

и

$$\mathrm{Homgr}_A(C'', E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(v, 1)} \mathrm{Homgr}_A(C, E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(u, 1)} \mathrm{Homgr}_A(C', E)$$

представляют собой точные последовательности комплексов k*модулей.*

б) *Пусть* $0 \to C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \to 0$ *– последовательность* A*-комплексов, которая расщепляема как точная последовательность градуированных* A*-модулей (это имеет место, например, если комплекс* C′ *инъективен или* C″ *проективен*). *Тогда для всякого комплекса* E *последовательности*

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(E, C') \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1, u)} \mathrm{Homgr}_A(E, C) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1, v)} \mathrm{Homgr}_A(E, C'') \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(C'', E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(v, 1)} \mathrm{Homgr}_A(C, E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(u, 1)} \mathrm{Homgr}_A(C', E) \to 0$$

представляют собой точные последовательности комплексов k*-модулей.*

В случае а) замечаем, что последовательности

$$\mathrm{Hom}_A(P_p, C'_q) \to \mathrm{Hom}_A(P_p, C_q) \to \mathrm{Hom}_A(P_p, C''_q)$$

и

$$\mathrm{Hom}_A(C''_q, E_p) \to \mathrm{Hom}_A(C_q, E_p) \to \mathrm{Hom}_A(C'_q, E_p)$$

точные для всех $p, q \in \mathbf{Z}$, и применяем II, p. 10, prop. 5 и II, p. 13, prop. 7. Доказательство утверждения б) аналогично.

2. Комплексы гомоморфизмов и гомотопии

Предложение 3. *Пусть* $C, \widetilde{C}, C', \widetilde{C}'$ *— четыре* A*-комплекса,* $u\colon \widetilde{C} \to C$, $v\colon \widetilde{C} \to C$, $u'\colon C' \to \widetilde{C}'$ *и* $v'\colon C' \to \widetilde{C}'$ *— четыре морфизма комплексов.*

а) *Если* u *и* u' *гомотопны* v *и* v' *соответственно, то два морфизма* $\mathrm{Homgr}_A(u, u')$ *и* $\mathrm{Homgr}_A(v, v')$ *из* $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ *в* $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{C}, \widetilde{C}')$ *гомотопны.*

б) *Если* u *и* u' *— гомотопизмы, то* $\mathrm{Homgr}_A(u, u')$ *— гомотопизм.*

в) *Если комплекс* C *или* C' *гомотопен нулю, то комплекс* $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ *гомотопен нулю.*

Обозначаем одной и той же буквой d дифференциалы комплексов $C, \widetilde{C}, C', \widetilde{C}'$ и буквой D дифференциалы комплексов $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ и $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{C}, \widetilde{C}')$. Если морфизм u (соответственно u') гомотопен v (соответственно v'), то существует градуированный гомоморфизм степени 1

$$w\colon \widetilde{C} \to C \qquad \text{(соответственно } w'\colon C' \to \widetilde{C}'),$$

для которого

$$u - v = dw + wd \qquad \text{(соответственно } u' - v' = dw' + w'd). \tag{2}$$

Пусть $W\colon \mathrm{Homgr}_A(C, C') \to \mathrm{Homgr}_A(\widetilde{C}, \widetilde{C}')$ — градуированный гомоморфизм степени 1, при котором для $f \in \mathrm{Homgr}_A(C, C')_n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$$W(f) = w'fu + (-1)^n v'fw. \tag{3}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}(DW + WD)(f) &= D[w'fu + (-1)^n v'fw] + W[df - (-1)^n fd] = \\ &= dw'fu - (-1)^{n+1} w'fud + (-1)^n dv'fw + v'fwd + \\ &+ w'dfu + (-1)^{n-1} v'dfw - (-1)^n w'fdu + v'fdw = \\ &= (dw' + w'd)fu + v'f(wd + dw) = \\ &= (u' - v')fu + v'f(u - v) = u'fu - v'fv;\end{aligned}$$

это дает, что $DW + WD = \mathrm{Homgr}_A(u, u') - \mathrm{Homgr}_A(v, v')$, откуда следует а).

Докажем б). Если u и u' — гомотопизмы, то пусть $\alpha\colon C \to \widetilde{C}$ и $\alpha'\colon \widetilde{C}' \to C'$ — морфизмы комплексов, для которых композиции $u \circ \alpha$, $\alpha \circ u$, $u' \circ \alpha'$, $\alpha' \circ u'$ гомотопны соответственно Id_C, $\mathrm{Id}_{\widetilde{C}}$, $\mathrm{Id}_{\widetilde{C}'}$, $\mathrm{Id}_{C'}$. Тогда морфизм $\mathrm{Homgr}(u, u') \circ \mathrm{Homgr}(\alpha, \alpha')$, который равен $\mathrm{Homgr}(\alpha \circ u, u' \circ \alpha')$, гомотопен, согласно а), морфизму

$$\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{Id}_{\widetilde{C}}, \mathrm{Id}_{\widetilde{C}'}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Homgr}(\widetilde{C}, \widetilde{C}')};$$

аналогично, морфизм $\mathrm{Homgr}(\alpha, \alpha') \circ \mathrm{Homgr}(u, u')$ гомотопен $\mathrm{Id}_{\mathrm{Homgr}(C, C')}$, откуда следует б).

Наконец, в) следует из утверждения б) (примененного к случаю, когда комплекс $\widetilde{C}$ или $\widetilde{C}'$ нулевой).

Следствие 1. *Если комплекс* C *расщепляем и модуль* H(C) *проективен (соответственно если* C′ *расщепляем и* $H_n(C')$ *инъективен для каждого* n), *то канонический гомоморфизм*

$$\lambda(C, C'): H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))$$

биективен.

Предположим, например, что комплекс C′ расщепляем и модуль $H_n(C')$ инъективен для каждого n, так как случай, когда C расщепляем и H(C) проективен, доказывается аналогичным образом. Согласно определению 6, с. 39, существует гомотопизм u': $C' \to H(C')$; согласно предложению 3, $\mathrm{Homgr}_A(1, u')$ – гомотопизм комплекса $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ на $\mathrm{Homgr}_A(C, H(C'))$; так как

$$\mathrm{Homgr}_A(1, H(u')) \circ \lambda(C, C') = \lambda(C, H(C')) \circ H(\mathrm{Homgr}_A(1, u'))$$

и так как отображения $\mathrm{Homgr}_A(1, H(u'))$ и $H(\mathrm{Homgr}_A(1, u'))$ биективны, то достаточно доказать, что отображение $\lambda(C, H(C'))$ биективно; это сводит утверждение к случаю, когда *комплекс* C′ *инъективен и имеет нулевой дифференциал.*

Тогда канонические точные последовательности (с. 33):

$$\text{(III)}\quad 0 \longrightarrow B(C) \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C/B(C) \longrightarrow 0,$$

$$\text{(IV)}\quad 0 \longrightarrow H(C) \xrightarrow{j} C/B(C) \xrightarrow{\delta} B(C) \longrightarrow 0$$

дают точные последовательности (с. 89, предложение 2, а)):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Homgr}_A(C/B(C), C') \xrightarrow{P} \mathrm{Homgr}_A(C, C') \xrightarrow{I} \mathrm{Homgr}_A(B(C), C') \longrightarrow 0,$$

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(B(C), C') \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Homgr}_A(C/B(C), C') \xrightarrow{J} \mathrm{Homgr}_A(H(C), C') \longrightarrow 0.$$

Так как $d_C = i \circ \delta \circ p$, то дифференциал D в $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ задается формулой $D_n = (-1)^{n+1} P_n \circ \Delta_n \circ I_n$; имеем теперь:

$$Z(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) = \mathrm{Ker}(P \circ \Delta \circ I) = \mathrm{Ker}\, I = \mathrm{Im}\, P,$$

$$B(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) = \mathrm{Im}(P \circ \Delta \circ I) = P(\mathrm{Im}\, \Delta) = P(\mathrm{Ker}\, I);$$

отсюда получаем изоморфизм φ: $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), C')$ такой, что если $a \in \mathrm{Homgr}_A(C/B(C), C')$, то образ при φ класса $P(a)$ есть $J(a)$; немедленно проверяется, что отображение φ совпадает с каноническим гомоморфизмом λ.

Следствие 2. *Предположим, что модули* B(C) *и* H(C) *проективны (соответственно* $B_n(C')$ *и* $H_n(C')$ *инъективны при каждом* n). *Тогда отображение* $\lambda(C, C')$ *биективно.*

Действительно, комплекс C (соответственно C′) тогда расщепляем – см. с. 39, пример 4, – и применимо следствие 1.

Следствие 3. *Пусть* M – *проективный (соответственно инъективный)* A*-модуль. Для всякого комплекса* A*-модулей* C *и всякого целого* n *канонический гомоморфизм*

$$H^n(\mathrm{Homgr}_A(M, C)) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^n(C))$$

(*соответственно* $H^n(\mathrm{Homgr}_A(C, M)) \to \mathrm{Hom}_A(H_n(C), M)$) *биективен*.

Лемма 1. а) *Если комплекс* C *или* C′ *ограничен справа, если* C *проективен и если* $H(C') = 0$, *то* $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) = 0$.

б) *Если комплекс* C *или* C′ *ограничен слева, если* C′ *инъективен и если* $H(C) = 0$, *то* $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) = 0$.

Пусть $f \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$; следовательно, f – морфизм комплексов из C в $C'(n)$; в случае а) (соответственно б)) отображение f_m нулевое для достаточно малого (соответственно достаточно большого) m. Согласно предложению 1, с. 54, морфизм f гомотопен нулю, следовательно, принадлежит $B_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$, откуда получаем искомое заключение.

Предложение 4. *Пусть* u: $C' \to C$ – *гомологизм комплексов*, P – *проективный комплекс*, E – *инъективный комплекс.*

а) *Если комплекс* P *ограничен справа или если* C *и* C′ *ограничены справа, то*

$$\mathrm{Homgr}_A(1, u)\colon \mathrm{Homgr}_A(P, C') \to \mathrm{Homgr}_A(P, C)$$

– *гомологизм.*

б) *Если комплекс* E *ограничен слева или если* C *и* C′ *ограничены слева, то*

$$\mathrm{Homgr}_A(u, 1)\colon \mathrm{Homgr}_A(C, E) \to \mathrm{Homgr}_A(C', E)$$

– *гомологизм.*

Предположим сначала, что морфизм u инъективен, и положим $C'' = \mathrm{Coker}\, u$. Так как u – гомологизм, комплекс C″ имеет нулевую гомологию. С другой стороны, имеем точные последовательности (предложение 2):

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(P, C') \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,u)} \mathrm{Homgr}_A(P, C) \to \mathrm{Homgr}_A(P, C'') \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(C'', E) \to \mathrm{Homgr}_A(C, E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(u,1)} \mathrm{Homgr}_A(C', E) \to 0;$$

согласно лемме 1, комплекс $\mathrm{Homgr}_A(P, C'')$ имеет нулевую гомологию в случае а), $\mathrm{Homgr}_A(C'', E)$ имеет нулевую гомологию в случае б), откуда следует искомое заключение.

В общем случае существуют (с. 41, следствие предложения 7) комплекс $\widetilde{C}'$, который ограничен справа (соответственно слева), когда C и C′ таковы, инъективный морфизм $\widetilde{u}$: $C' \to \widetilde{C}'$ и гомотопизм β: $\widetilde{C}' \to C$, для которых $u = \beta \circ \widetilde{u}$. Тогда $\widetilde{u}$ – гомологизм (с. 38, следствие предложения 5); согласно предыдущему, $\mathrm{Homgr}_A(1_P, \widetilde{u})$ (соответственно $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{u}, 1_E)$) – гомологизм в случае а) (соответственно б)). С другой стороны, $\mathrm{Homgr}_A(1_P, \beta)$ (соответственно, $\mathrm{Homgr}_A(\beta, 1_E)$) – гомотопизм (предложение 3); поэтому $\mathrm{Homgr}_A(1_P, u)$ (соответственно $\mathrm{Homgr}_A(u, 1_E)$) представляет собой композицию двух гомологизмов и, следовательно, является гомологизмом.

3. Определение и простейшие свойства модулей расширений

Для всякого A-модуля E обозначим через p_E: $L(E) \to E$ (соответственно e_E: $E \to I(E)$) каноническую свободную (соответственно инъективную) резольвенту, см, с. 56 (соответственно с. 58).

Определение 1. Пусть M и N – два A-модуля. *Модулем расширений* модуля N посредством M называется градуированный k-модуль

$$\mathrm{Ext}_A(M, N) = H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))). \tag{4}$$

Однородные компоненты модуля $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ обозначаются через

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = H^n(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))). \tag{5}$$

Так как комплекс L(M) (соответственно I(N)) нулевой справа (соответственно слева), то

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0 \quad \text{при} \quad n < 0. \tag{6}$$

Замечание 1. Ниже (с. 108–109, предложение 6) мы рассмотрим свойства конечности модулей $\mathrm{Ext}_A(M, N)$. Например, если A — нётерово коммутативное кольцо и если M и N — A-модули конечного типа, то каждый A-модуль $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ имеет конечный тип.

Пусть $f\colon M' \to M$ и $g\colon N \to N'$ — гомоморфизмы A-модулей; положим

$$\mathrm{Ext}_A(f, g) = H(\mathrm{Homgr}_A(L(f), I(g)));$$

это гомоморфизм степени 0 градуированных k-модулей

$$\mathrm{Ext}_A(f, g)\colon \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M', N'),$$

однородные компоненты которого обозначаются через

$$\mathrm{Ext}_A^n(f, g)\colon \mathrm{Ext}_A^n(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^n(M', N).$$

Согласно предложению 1, с. 89, канонический гомоморфизм

$$\lambda^0(L(M, I(N)))\colon H^0(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N)) \to \mathrm{Hom}_A(H_0(L(M)), H^0(I(N)))$$

биективен; используя изоморфизмы $M \to H_0(L(M))$ и $H^0(I(M)) \to N$, получаем отсюда *изоморфизм*, называемый *каноническим*,

$$\lambda_{M,N}\colon \mathrm{Ext}_A^0(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N). \tag{7}$$

Мы всегда будем отождествлять $\mathrm{Ext}_A^0(M, N)$ *с* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *посредством этого изоморфизма.* При этом k-линейное отображение $\mathrm{Ext}_A^0(f, g)$ отождествляется с $\mathrm{Hom}_A(f, g)$.

Замечание 2. Морфизм комплексов

$$\mathrm{Homgr}_A(p_M, e_N)\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))$$

индуцирует на гомологии степени 0 изоморфизм

$$\lambda_{M,N}^{-1}\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^0(M, N),$$

обратный к $\lambda_{M,N}$.

Имеем: $L(1_M) = 1_{L(M)}$, $I(1_N) = 1_{I(N)}$, следовательно, при переходе к гомологии, получаем:

$$\mathrm{Ext}_A(1_M, 1_N) = 1_{\mathrm{Ext}_A(M, N)}. \tag{8}$$

Если $f'\colon M'' \to M'$ и $g'\colon N' \to N''$ — гомоморфизмы A-модулей, то $L(f \circ f') = L(f) \circ L(f')$ и $I(g' \circ g) = I(g') \circ I(g)$, следовательно,

$$\mathrm{Ext}_A(f \circ f', g' \circ g) = \mathrm{Ext}_A(f', g') \circ \mathrm{Ext}_A(f, g). \tag{9}$$

Рассмотрим морфизмы k-комплексов

$$\mathrm{Homgr}_A(L(M), N) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}_A(1, e_N)} \mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N)) \xleftarrow{\mathrm{Homgr}_A(p_M, 1)} \mathrm{Homgr}_A(M, I(N))$$

и гомоморфизмы, которые они индуцируют в гомологии:

$$H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N) \xrightarrow{\varphi_M(N)} \mathrm{Ext}_A(M, N) \xleftarrow{\bar{\varphi}_N(M)} H(\mathrm{Homgr}_A(M, I(N))).$$

Согласно предложению 4, с. 92, $\mathrm{Homgr}_A(1, e_N)$ и $\mathrm{Homgr}_A(p_M, 1)$ — гомологизмы, откуда:

Предложение 5. *k-гомоморфизмы*

$$\varphi_M(N)\colon H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N)$$

и

$$\bar{\varphi}_N(M)\colon H(\mathrm{Homgr}(M, I(N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N)$$

биективны.

Следствие. *Если модуль* M *проективен (соответственно если* N *инъективен), то* $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ *при* $i > 0$.

Действительно, морфизм

$$\mathrm{Homgr}_A(1, e_N)\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Homgr}_A(M, I(N))$$

(соответственно $\mathrm{Homgr}_A(p_M, 1)\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Homgr}(L(M), N)$) представляет собою гомологизм (с. 92, предложение 4), откуда следует искомое заключение.

Замечания. 3. Если $g\colon N \to N'$ – гомоморфизм A-модулей, то

$$\mathrm{Homgr}_A(1_{L(M)}, e_{N'}) \circ \mathrm{Homgr}_A(1_{L(M)}, g) = \mathrm{Homgr}_A(1_{L(M)}, I(g)) \circ \mathrm{Homgr}_A(1_{L(M)}, e_N),$$

следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N)) & \xrightarrow{\varphi_M(N)} & \mathrm{Ext}_A(M, N) \\ \downarrow{\scriptstyle H(\mathrm{Homgr}_A(1_{L(M)}, g))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_A(1_M, g)} \\ H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N')) & \xrightarrow{\varphi_M(N')} & \mathrm{Ext}_A(M, N') \end{array}$$

коммутативна.

4. Аналогично, если $f\colon M' \to M$ – гомоморфизм A-модулей, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(\mathrm{Homgr}_A(M, I(N))) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_N(M)} & \mathrm{Ext}_A(M, N) \\ \downarrow{\scriptstyle H(\mathrm{Homgr}_A(f, 1_{I(N)}))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_A(f, 1_N)} \\ H(\mathrm{Homgr}_A(M', I(N))) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_N(M')} & \mathrm{Ext}_A(M', N) \end{array}$$

коммутативна.

Предложение 6. *Отображение* $(f, g) \mapsto \mathrm{Ext}_A(f, g)$:

$$\mathrm{Hom}_A(M', M) \times \mathrm{Hom}_A(N, N') \to \mathrm{Homgr}_k(\mathrm{Ext}_A(M, N), \mathrm{Ext}_A(M', N'))$$

k-билинейно.

Пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(M', M)$, $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_A(N, N')$, $\lambda_1, \lambda_2 \in k$; тогда морфизмы $\mathrm{Homgr}_A(L(f), \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$ и $\lambda_1 \mathrm{Homgr}_A(L(f), g_1) + \lambda_2 \mathrm{Homgr}_A(L(f), g_2)$ из $\mathrm{Homgr}(L(M), N)$ в $\mathrm{Homgr}_A(L(M), N')$ совпадают; следовательно, согласно предложению 5 и замечанию 3,

$$\mathrm{Ext}_A(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \mathrm{Ext}_A(f, g_1) + \lambda_2 \mathrm{Ext}(f, g_2). \tag{10}$$

Аналогичные рассуждения применимы и для отображения $f \mapsto \mathrm{Ext}_A(f, g)$.

Следствие. *Пусть* $\lambda \in k$. *Если элемент* λ *аннулирует* M *или* N, *то он аннулирует* $\mathrm{Ext}_A(M, N)$.

Действительно, $\lambda 1_{\mathrm{Ext}_A(M,N)} = \mathrm{Ext}_A(\lambda 1_M, 1_N) = \mathrm{Ext}_A(1_M, \lambda 1_N)$.

Предложение 7. *Пусть* I *и* J – *два множества,* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ *и* $(N_\beta)_{\beta \in J}$ – *два семейства* A-*модулей; гомоморфизм* $\mathrm{Ext}_A(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, \prod_{\beta \in J} N_\beta) \to \prod_{\beta \in J, \alpha \in I} \mathrm{Ext}_A(M_\alpha, N_\beta)$, *получаемый из канонических гомоморфизмов* $M_\alpha \to \oplus M_\alpha$ *и* $\prod N_\beta \to N_\beta$ – *биективен.*

Достаточно доказать, что для всякого A-модуля M (соответственно N) гомоморфизмы

$$\mathrm{Ext}_A(M, \prod N_\beta) \to \prod \mathrm{Ext}_A(M, N_\beta) \quad (\text{соответственно } \mathrm{Ext}_A(\oplus M_\alpha, N) \to \prod \mathrm{Ext}_A(M_\alpha, N))$$

биективны. Но это следует из предыдущего, из предложения 1 (с. 34) и из канонических изоморфизмов $\mathrm{Homgr}_A(L(M), \prod N_\beta) \to \prod \mathrm{Homgr}_A(L(M), N_\beta)$ и $\mathrm{Homgr}_A(\oplus M_\alpha, I(N)) \to \prod \mathrm{Homgr}_A(M_\alpha, I(N))$.

Замечание 5. Пусть P и Q – два правых A-модуля. Определим $\mathrm{Ext}_A(P, Q)$, положив

$$\mathrm{Ext}_A(P, Q) = H(\mathrm{Homgr}_A(L(P), I(Q)) =$$

$$= H(\mathrm{Homgr}_{A^\circ}(L(P^\circ), I(Q^\circ)) = \mathrm{Ext}_{A^\circ}(P^\circ, Q^\circ).$$

Все определения и предложения этого параграфа применимы, следовательно, к правым A-модулям путем рассмотрения их как левых модулей над кольцом A°.

4. Связывающие гомоморфизмы и точные последовательности

Пусть M – A-модуль. Напомним, что для всякого A-модуля N мы определили в предыдущем пункте изоморфизм k-модулей

$$\varphi_M(N) = H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N).$$

Пусть

$$(\&) \qquad 0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \to 0$$

– точная последовательность A-модулей; тогда последовательность k-комплексов

$$({}_M\mathscr{E}) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Homgr}_A(L(M), N') \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,u)} \mathrm{Homgr}_A(L(M), N) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,v)} \mathrm{Homgr}_A(L(M), N'') \longrightarrow 0$$

является точной (с. 89, предложение 2, а)); пусть

$$\partial({}_M\&): H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N'')) \to H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), N'))$$

– соответствующий связывающий гомоморфизм (с. 34).

Определение 2. Композиция гомоморфизмов

$$\delta(M, \&) = \varphi_M(N') \circ \partial({}_M\&) \circ \varphi_M(N'')^{-1}: \mathrm{Ext}_A(M, N'') \to \mathrm{Ext}_A(M, N')$$

называется *связывающим гомоморфизмом для модулей расширений относительно модуля* M *и точной последовательности* (&).

Это градуированный k-гомоморфизм верхней степени 1, однородные компоненты которого обозначаются через $\delta^n(M, \&)$: $\mathrm{Ext}_A^n(M, N'') \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N')$.

Теорема 1. *Неограниченная справа последовательность гомоморфизмов k-модулей*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,u)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,v)} \mathrm{Hom}_A(M, N'') \xrightarrow{\delta^0(M,\mathscr{E})} \mathrm{Ext}_A^1(M, N') \to \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}(M,\mathscr{E})} \mathrm{Ext}_A^n(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(1,u)} \mathrm{Ext}_A^n(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(1,v)} \mathrm{Ext}_A^n(M, N'') \xrightarrow{\delta^n(M,\mathscr{E})} \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N') \to \cdots$$

является точной.

Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{Ext}(M, N') & \xrightarrow{\mathrm{Ext}(1,u)} & \mathrm{Ext}(M, N) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}(1,v)} & \mathrm{Ext}(M, N'') & \xrightarrow{\delta(M,\mathscr{E})} & \mathrm{Ext}(M, N') & \xrightarrow{\mathrm{Ext}(1,u)} & \mathrm{Ext}(M, N) \\
\uparrow{\scriptstyle \varphi_M(N')} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_M(N)} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_M(N'')} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_M(N')} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_M(N)} \\
H(\mathrm{Homgr}(L(M), N')) & \xrightarrow{H(\mathrm{Homgr}(1,u))} & H(\mathrm{Homgr}(L(M), N)) & \xrightarrow{H(\mathrm{Homgr}(1,v))} & H(\mathrm{Homgr}(L(M), N'')) & \xrightarrow{\partial({}_M\mathscr{E})} & H(\mathrm{Homgr}(L(M), N')) & \xrightarrow{H(\mathrm{Homgr}(1,u))} & H(\mathrm{Homgr}(L(M), N))
\end{array}$$

Она коммутативна согласно замечанию 3 (с. 94) и определению 2; с другой стороны, нижняя строка точная (с. 35, теорема 1), а вертикальные стрелки биективны (с. 93, предложение 5).

Следствие. *Если* $\mathrm{Ext}_A^1(M, N') = 0$, *то последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,u)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,v)} \mathrm{Hom}_A(M, N'') \to 0$$

точная.

Предложение 8. *Пусть* $f: M_1 \to M$ – *гомоморфизм A-модулей и*

$$\begin{array}{lccccccc}
(\mathscr{E}) & 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{v} & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g''} \\
(\mathscr{E}_1) & 0 & \longrightarrow & N_1' & \xrightarrow{u_1} & N_1 & \xrightarrow{v_1} & N_1'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

– *коммутативная диаграмма A-модулей с точными строками. Диаграмма k-модулей*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_A(M, N'') & \xrightarrow{\delta(M,\mathscr{E})} & \mathrm{Ext}_A(M, N') \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}(f, g'')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}(f, g')} \\
\mathrm{Ext}_A(M_1, N_1'') & \xrightarrow{\delta(M,\mathscr{E}_1)} & \mathrm{Ext}_A(M_1, N_1')
\end{array}$$

коммутативна.

Это следует из предложения 2, с. 36, примененного к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Homgr}_A(L(M), N') & \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,u)} & \mathrm{Homgr}_A(L(M), N) & \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,v)} & \mathrm{Homgr}_A(L(M), N'') & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Homgr}(L(f), g')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Homgr}(L(f), g)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Homgr}(L(f), g'')} & & \\ 0 & \to & \mathrm{Homgr}_A(L(M_1), N_1') & \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,u_1)} & \mathrm{Homgr}_A(L(M_1), N_1) & \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(1,v_1)} & \mathrm{Homgr}_A(L(M_1), N_1'') & \to & 0 \end{array}$$

Пусть N – A-модуль и

$(\mathscr{F})$ $0 \to M' \xrightarrow{r} M \xrightarrow{s} M'' \to 0$

– точная последовательность A-модулей; последовательность комплексов

$$(\mathscr{F}_N) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Homgr}_A(M'', I(N)) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(s,1)} \mathrm{Homgr}_A(M, I(N)) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(r,1)} \mathrm{Homgr}_A(M', I(N)) \longrightarrow 0$$

является точной (с. 89, предложение 2, а)); пусть

$\partial(\mathscr{F}_N)$: $\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A)(M', I(M))) \to \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(M', I(N)))$

– соответствующий связывающий гомоморфизм.

Определение 3. Композиция гомоморфизмов

$$\delta(\mathscr{F}, N) = \bar{\varphi}_N(M'') \circ \partial(\mathscr{F}_N) \circ \bar{\varphi}_N(M')^{-1}: \mathrm{Ext}_A(M', N) \to \mathrm{Ext}_A(M'', N)$$

называется *связывающим гомоморфизмом для модулей расширений относительно точной последовательности* $(\mathscr{F})$ *и модуля* N.

Это градуированный k-гомоморфизм верхней степени 1, однородные компоненты которого обозначаются через $\delta^n(\mathscr{F}, N)$: $\mathrm{Ext}_A^n(M', N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N)$.

Так же, как и выше, доказываются следующие утверждения:

Теорема 2. *Неограниченная справа последовательность гомоморфизмов k-модулей*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(s,1)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(r,1)} \mathrm{Hom}_A(M', N)$$

$$\xrightarrow{\delta^0(\mathscr{F},N)} \mathrm{Ext}_A^1(M'', N) \to \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}(\mathscr{F},N)} \mathrm{Ext}_A^n(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(s,1)} \mathrm{Ext}_A^n(M, N)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(r,1)} \mathrm{Ext}_A^n(M', N) \xrightarrow{\delta^n(\mathscr{F},N)} \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N) \to \cdots$$

является точной.

Следствие. *Если* $\mathrm{Ext}_A^1(M'', N) = 0$, *то последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(s,1)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(r,1)} \mathrm{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0$$

точная.

Предложение 9. *Пусть* $g: N \to N_1$ – *гомоморфизм A-модулей и*

$$\begin{array}{lccccccc} (\mathscr{F}_1) & 0 & \to & M_1' & \xrightarrow{r_1} & M_1 & \xrightarrow{s_1} & M_1'' \to 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ (\mathscr{F}) & 0 & \to & M' & \xrightarrow{r} & M & \xrightarrow{s} & M'' \to 0 \end{array}$$

– *коммутативная диаграмма A-модулей с точными строками. Диаграмма k-модулей*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A(M', N) & \xrightarrow{\delta(\mathscr{F}, N)} & \mathrm{Ext}_A(M'', N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_A(f', g)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_A(f'', g)} \\ \mathrm{Ext}_A(M_1', N_1) & \xrightarrow{\delta(\mathscr{F}_1, N_1)} & \mathrm{Ext}_A(M_1'', N_1) \end{array}$$

коммутативна.

5. Проективные модули, инъективные модули и модули расширений

Предложение 10. *Пусть* M – A-*модуль. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *Модуль* M проективен.
(ii) $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля* N *и всякого целого* $i > 0$.
(iii) $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля* N.
(iv) *Существует точная последовательность*

$$0 \to K \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} M \to 0,$$

в которой модуль P *проективен и* $\mathrm{Ext}^1_A(M, K) = 0$.

(i) ⇒ (ii): это следствие предложения 5 (с. 93).
(ii) ⇒ (iii): это тривиально.
(iii) ⇒ (iv): это очевидно, так как M есть фактормодуль некоторого свободного модуля.
(iv) ⇒ (i): так как $\mathrm{Ext}^1_A(M, K) = 0$, то каноническое отображение

$$\mathrm{Hom}_A(M, P) \to \mathrm{Hom}_A(M, M)$$

сюръективно (с. 95, следствие); существует, следовательно, A-линейное сечение гомоморфизма v, и модуль M изоморфен прямому множителю модуля P, следовательно, проективен.

Предложение 11. *Пусть* N – A-*модуль. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *Модуль* N *инъективен.*
(ii) $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля* M *и всякого целого* $i > 0$.
(iii) $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля* M.
(iv) *Существует точная последовательность*

$$0 \to N \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} C \to 0,$$

в которой модуль I *инъективен и* $\mathrm{Ext}^1_A(C, N) = 0$.

(v) $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *для всякого моногенного* A-*модуля* M.

(i) ⇒ (ii): это следствие предложения 5 (с. 93).
(ii) ⇒ (iii) ⇒ (v): это тривиально.
(iii) ⇒ (iv): это очевидно, так как N есть подмодуль некоторого инъективного A-модуля (с. 22, следствие 3).
(iv) ⇒ (i): так как $\mathrm{Ext}^1_A(C, N) = 0$, то канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(I, N) \to \mathrm{Hom}_A(N, N)$$

сюръективен (с. 96, следствие); существует, следовательно, A-линейная ретракция вложения u, и модуль N изоморфен прямому множителю модуля I, следовательно, инъективен (с. 19, предложение 9).
(v) ⇒ (i): если $\mathfrak{a}$ – идеал в A, то $\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{a}, N) = 0$; каноническое отображение $\mathrm{Hom}_A(A, N) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, N)$, следовательно, сюръективно, и модуль N инъективен (с. 19, предложение 10).

6. Формула универсальных коэффициентов

В этом пункте рассматриваются два комплекса A-модулей (C, d) и (C', d'). Рассмотрим канонические точные последовательности:

(I) $\quad 0 \to Z(C) \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\delta} B(C)(-1) \to 0,$

(II_p) $\quad 0 \to B_p(C) \xrightarrow{i} Z_p(C) \xrightarrow{p} H_p(C) \to 0;$

из δ получаем k-гомоморфизм:

$$\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}(\delta, 1)): \quad \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(B(C), C'))(1) \to \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(C, C'));$$

из (II_p) получаем связывающие гомоморфизмы:

$$\delta(\mathrm{II}_p, H^q(C')): \mathrm{Hom}_A(B_p(C), H^q(C)) \to \mathrm{Ext}^1_A(H_p(C), H^q(C')),$$

откуда посредством перехода к произведению, гомоморфизмы k-модулей:

$$\varphi^n\colon \operatorname{Homgr}^n_{\Lambda}(B(C), H(C')) \to \prod_{p+q=n} \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(H_p(C), H^q(C')).$$

Кроме того, мы располагаем каноническими гомоморфизмами (с. 89)

$$\lambda^n(B(C), C')\colon H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B(C), C') \to \operatorname{Homgr}^n_{\Lambda}(B(C), H(C')).$$

В этих обозначениях имеет место:

Т е о р е м а 3. *Предположим, что* Λ*-модули* $B(C)$ *и* $Z(C)$ *проективны. Для каждого* n *существует единственный гомоморфизм* k*-модулей*

$$\beta^n\colon \prod_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(H_p(C), H^q(C')) \to H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(C, C')),$$

определяющий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Homgr}^{n-1}_{\Lambda}(B(C), H(C')) & \xleftarrow{\lambda^{n-1}(B(C), C')} & H^{n-1}(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B(C), C')) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle H^n(\operatorname{Homgr}(\delta, 1))} \\ \prod_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(H_p(C), H^q(C')) & \xrightarrow{\beta^n} & H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(C, C')). \end{array}$$

Последовательности k*-модулей*

$$0 \longrightarrow \prod_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(H_p(C), H^q(C')) \xrightarrow{\beta^n} H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(C, C'))$$

$$\xrightarrow{\lambda^n(C, C')} \prod_{p+q=n} \operatorname{Hom}_{\Lambda}(H_p(C), H^q(C')) \to 0 \qquad (11)$$

являются точными.

З а м е ч а н и е. Можно доказать аналогичное утверждение, предполагая модули $B_n(C')$ и $C'/B_n(C')$ *инъективными* для каждого n.

Положим для простоты: $B = B(C)$, $Z = Z(C)$, $H = H(C)$ и $H' = H(C')$. Так как модуль B проективен, то из (I) получаем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B, C')(1) \xrightarrow{\operatorname{Homgr}(\delta, 1)} \operatorname{Homgr}_{\Lambda}(C, C')$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Homgr}(j, 1)} \operatorname{Homgr}_{\Lambda}(Z, C') \to 0. \qquad (12)$$

Л е м м а 2. *Связывающий гомоморфизм*

$$H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(Z, C')) \to H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B, C')),$$

соответствующий точной последовательности (12), *равен* $(-1)^{n+1} H(\operatorname{Homgr}(i, 1))$.

Действительно, пусть $a \in Z^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(Z, C'))$; это морфизм комплексов верхней степени n из Z в C', значения которого содержатся, следовательно, в $Z(C')$. Так как точная последовательность (I) расщепляется (поскольку модуль B проективен), a продолжается до некоторого элемента b из $\operatorname{Homgr}^n_{\Lambda}(C, Z(C'))$. По определению, образ класса a при искомом связывающем гомоморфизме есть класс в $H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B, C'))$ гомоморфизма u из B в C', для которого при $x \in C$

$$u(dx) = Db(x) = d'bx - (-1)^n b(dx) = (-1)^{n+1} b(dx) = (-1)^{n+1} a(dx),$$

откуда следует утверждение леммы.

Гомологическая точная последовательность, ассоциированная с (12), дает, следовательно точную последовательность

$$\to H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(Z, C')) \xrightarrow{H(\operatorname{Homgr}(i, 1))} H^n(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(B, C'))$$

$$\xrightarrow{H(\operatorname{Homgr}(\delta, 1))} H^{n+1}(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(C, C')) \xrightarrow{H(\operatorname{Homgr}(j, 1))} H^{n+1}(\operatorname{Homgr}_{\Lambda}(Z, C')) \to \ldots.$$

Кроме того, так как модуль Z проективен, из (Π_p) получаем точные последовательности

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\Lambda}(H_p, H'^q) \to \operatorname{Hom}_{\Lambda}(Z_p, H'^q) \to \operatorname{Hom}_{\Lambda}(B_p, H'^q) \to \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(H_p, H'^q) \to 0,$$

откуда посредством перехода к произведениям имеем точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Homgr}^n_A(H, H') \to \mathrm{Homgr}^n_A(Z, H') \to \mathrm{Homgr}^n_A(B, H') \to \prod_{p+q=n} \mathrm{Ext}^1_A(H_p, H'^q) \to 0.$$

Наконец, мы располагаем каноническими гомоморфизмами из п. 1:

$\lambda_B = \lambda(B, C')$: $H(\mathrm{Homgr}_A(B, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(B, H')$,

$\lambda_Z = \lambda(Z, C')$: $H(\mathrm{Homgr}_A(Z, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(Z, H')$,

$\lambda_C = \lambda(C, C')$: $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H, H')$,

откуда получаем диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{Homgr}^{n-1}(i,1) & & \varphi^{n-1} & & \| & & \\
\mathrm{Homgr}^{n-1}_A(Z,H') & \longrightarrow & \mathrm{Homgr}^{n-1}_A(B,H') & \longrightarrow & & & \mathrm{Ext}^1(H_p, H'^q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & {\scriptstyle p+q=n-1} & & \\
\uparrow{\scriptstyle \lambda_Z^{n-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \lambda_B^{n-1}} & & & & & & \\
H^{n-1}(\mathrm{Homgr}_A(Z,C')) & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathrm{Homgr}_A(B,C')) & \longrightarrow & H^n(\mathrm{Homgr}_A(C,C')) & \longrightarrow & H^n(\mathrm{Homgr}_A(Z,C')) & \longrightarrow & H^n(\mathrm{Homgr}_A(B,C')) \\
 & & H^{n-1}(\mathrm{Homgr}(i,1)) & & H^n(\mathrm{Homgr}(\delta,1)) & & H^n(\mathrm{Homgr}(j,1)) & & H^n(\mathrm{Homgr}(i,1)) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_C^n} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_Z^n} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_B^n} \\
 & & & & \mathrm{Homgr}^n(j,1) & & \mathrm{Homgr}^n(i,1) & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Homgr}^n_A(H,H') & \longrightarrow & \mathrm{Homgr}^n_A(Z,H') & \longrightarrow & \mathrm{Homgr}^n_A(B,H') & &
\end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна по построению гомоморфизмов λ. Кроме того, так как комплексы B и Z расщепляемы и проективны, гомоморфизмы λ_B и λ_Z биективны (с. 91, следствие 1). Отсюда заключаем, с одной стороны, что гомоморфизм λ_C^n сюръективен и имеет ядро, равное $\mathrm{Im}\, H^n(\mathrm{Homgr}(\delta, 1))$, а с другой стороны, что гомоморфизм $\varphi^{n-1} \circ \lambda_B^{n-1}$ сюръективен и имеет ядро, равное $\mathrm{Ker} H^n(\mathrm{Homgr}(\delta, 1))$. Отсюда непосредственно следует теорема.

Следствие 1. *Предположим, что модули* B(C) *и* Z(C) *проективны, а модуль* $B^n(C')$ *инъективен для каждого* n. *Тогда точные последовательности* (11) *расщепляемы.*

Это вытекает из теоремы и следующей леммы:

Лемма 3. *Если модуль* B(C) *проективен и модуль* $B^n(C')$ *инъективен при каждом* n, *то канонический гомоморфизм* $\lambda(C, C')$: $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))$ *обладает* k*-линейным сечением.*

Действительно, согласно замечаниям а) и б), с. 39–40, существуют гомологизмы

$$\varphi\colon C \to H(C) \quad \text{и} \quad \varphi'\colon H(C') \to C',$$

для которых $H(\varphi) = 1_{H(C)}$ и $H(\varphi') = 1_{H(C')}$.

В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
H(\mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))) & \xrightarrow{H(\mathrm{Homgr}(\varphi, \varphi'))} & H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda(H(C), H(C'))} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda(C, C')} \\
\mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C')) & \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(H(\varphi), H(\varphi'))} & \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))
\end{array}$$

гомоморфизм $\lambda(H(C), H(C'))$ биективен, а $\mathrm{Homgr}(H(\varphi), H(\varphi'))$ тождественный, откуда следует утверждение.

Следствие 2. *Если модули* B(C) *и* Z(C) *проективны, то для всякого* A*-модуля* N *и всякого целого* n *имеем расщепляемую точную последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(H_{n-1}(C), N) \xrightarrow{\beta^n} H^n(\mathrm{Homgr}_A(C, N)) \xrightarrow{\lambda^n} \mathrm{Hom}_A(H_n(C), N) \longrightarrow 0. \tag{13}$$

Следствие 3 ("формула универсальных коэффициентов"). *Предположим, что* A *– кольцо главных идеалов и что комплекс* C *свободен. Для всякого* A*-модуля* N *и всякого целого* n *имеет место расщепляемая точная последовательность* (13).

Действительно, модули B(C) и Z(C) свободны как подмодули свободного модуля C (VII, § 3, cor. 2 au th. 1; Алгебра, VII, стр. 43, теорема 1).

Следствие 4. *Если комплекс* C *ограничен справа и если* C *и* H(C) *проективны, то гомоморфизм*

$\lambda(C, C')$: $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))$

биективен.

Согласно теореме, достаточно доказать, что модули B(C) и Z(C) проективны. Но мы имеем точные последовательности

$$0 \to B_n(C) \to Z_n(C) \to H_n(C) \to 0,$$

$$0 \to Z_n(C) \to C_n \to B_{n-1}(C) \to 0;$$

следовательно, ($B_{n-1}(C)$ проективен) $\Rightarrow$ ($Z_n(C)$ проективен) $\Rightarrow$ ($B_n(C)$ проективен). Получаем искомый вывод, замечая, что $B_n(C) = 0$ при достаточно малом n.

7. Обобщение на комплексы мультимодулей; канонические изоморфизмы

Пусть B, B′ – два кольца, C – комплекс (A, B)-бимодулей, C′ – комплекс (A, B′)-бимодулей; тогда ($\mathrm{Homgr}_A(C, C')$, D) – комплекс (B, B′)-бимодулей и канонический гомоморфизм λ: $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to \mathrm{Homgr}_A(H(C), H(C'))$ представляет собою гомоморфизм (B, B′)-бимодулей.

Пусть $k^{(B)}$ и $k^{(B')}$ – моноидные алгебры мультипликативных моноидов колец B и B′ соответственно. Если M – (A, B)-бимодуль и N – (A, B′)-бимодуль, то, согласно формуле (8), с. 57, L(M) представляет собой комплекс (A, $k^{(B)}$)-бимодулей, а I(N), согласно формуле (15), с. 58, – комплекс (A, $k^{(B')}$)-бимодулей и, следовательно, $\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))$ – комплекс ($k^{(B)}$, $k^{(B')}$)-бимодулей, так что $\mathrm{Ext}_A(M, A)$ естественным образом наделяется структурой градуированного ($k^{(B)}$, $k^{(B')}$)-бимодуля, которая посредством канонических гомоморфизмов $k^{(B)} \to B$ и $k^{(B')} \to B'$ индуцирует на $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ структуру градуированного (B, B′)-бимодуля (ср. с. 57, замечание, и с. 58, замечание); на члене степени 0 эта структура совпадает со структурой (B, B′)-бимодуля на $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (II, p. 35).

Если $\lambda \in B$, $\lambda' \in B'$ и если обозначить через $\lambda_M, \lambda'_N, \lambda_E, \lambda'_E$ гомотетии $x \mapsto x\lambda, y \mapsto y\lambda'$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto z\lambda'$ на M, N, $\mathrm{Ext}_A(M, N)$, $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ соответственно, то

$$\lambda_E = \mathrm{Ext}_A(\lambda_M, 1),$$

$$\lambda'_E = \mathrm{Ext}_A(1, \lambda'_N),$$

и это дает другое описание структуры бимодуля на $\mathrm{Ext}_A(M, N)$.

Мы предоставляем читателю обобщить результаты п. 4 и 6 на случай комплексов мультимодулей.

Пусть C, C′, C″ – комплексы A-модулей. Композиция отображений определяет градуированный гомоморфизм степени нуль:

$$\mathrm{Homgr}_A(C, C'') \otimes_k \mathrm{Homgr}_A(C, C') \to \mathrm{Homgr}_A(C, C''). \tag{14}$$

Пусть B, B′, E – кольца, C, C′, C″ – комплексы (B′, A)-бимодулей, (A, E)-бимодулей, (B, E)-бимодулей соответственно. Посредством ограничения канонического изоморфизма из II, p. 73, получаем биективный гомоморфизм (B, B′)-бимодулей

$$\mathrm{Homgr}_E(C \otimes_A C', C'') \to \mathrm{Homgr}_A(C, \mathrm{Homgr}_E(C', C'')). \tag{15}$$

Пусть, наконец, B – кольцо, C – комплекс правых B-модулей, C′ – комплекс правых A-модулей, C″ – комплекс (B, A)-бимодулей. Из канонических гомоморфизмов (II, p. 75)

$$C_p \otimes_B \mathrm{Hom}_A(C'_q, C''_r) \to \mathrm{Hom}_A(C'_q, C_p \otimes_B C''_r)$$

получаем градуированный гомоморфизм степени нуль:

$$C \otimes_B \mathrm{Homgr}_A(C', C'') \to \mathrm{Homgr}_A(C', C \otimes_B C''). \tag{16}$$

Этот гомоморфизм биективен, когда C – проективный модуль конечного типа (II, p. 75, prop. 2).

Предложение 12. *Гомоморфизмы* (14), (15), (16) *представляют собой морфизмы комплексов.*

Докажем это, например, для гомоморфизма (14). Обозначим этот гомоморфизм через

$$\kappa\colon \operatorname{Homgr}_A(C', C'') \otimes_k \operatorname{Homgr}_A(C, C') \to \operatorname{Homgr}_A(C, C'').$$

Пусть $f \in \operatorname{Homgr}_A(C', C'')_p$ и $g \in \operatorname{Homgr}_A(C, C')_q$; тогда по определению имеем: $\kappa(f \otimes g) = f \circ g$. Кроме того:

$$D(f \otimes g) = Df \otimes g + (-1)^p f \otimes Dg =$$

$$= (d'' \circ f) \otimes g - (-1)^p (f \circ d') \otimes g + (-1)^p f \otimes (d' \circ g) - (-1)^{p+q} f \otimes (g \circ d),$$

откуда

$$\kappa(D(f \otimes g)) = d'' \circ f \circ g - (-1)^p f \circ d' \circ g + (-1)^p f \circ d' \circ g - (-1)^{p+q} f \circ g \circ d =$$

$$= d'' \circ f \circ g - (-1)^{p+q} f \circ g \circ d = D(f \circ g) = D(\kappa(f \otimes g)).$$

Аналогично доказывается, что гомоморфизмы (15) и (16) являются морфизмами комплексов.

Из морфизма (14) получаем гомоморфизмы k-модулей (с. 71):

$$H^p(\operatorname{Homgr}_A(C', C'')) \otimes_k H^q(\operatorname{Homgr}_A(C, C')) \to H^{p+q}(\operatorname{Homgr}_A(C, C'')). \tag{17}$$

Взяв $C = A$, мы видим, что гомоморфизм

$$\operatorname{Homgr}_A(C', C'') \otimes_k C' \to C'', \tag{18}$$

который отображает $f \otimes x$ на $f(x)$, является *морфизмом комплексов* левых A-модулей; с ним ассоциируется канонический гомоморфизм (с. 85) градуированных A-модулей $\gamma\colon H(\operatorname{Homgr}_A(C', C'')) \otimes_k H(C') \to H(C'')$, который соответствует каноническому гомоморфизму k-модулей

$$\lambda\colon H(\operatorname{Homgr}_A(C', C'')) \to \operatorname{Homgr}_A(H(C'), H(C'')).$$

Упражнения

¶ 1. A-комплекс C называется *чистым*, если $H(P \otimes_A C) = 0$ для всякого правого A-модуля P.

а) Комплекс, гомотопный нулю, чистый; комплекс из плоских модулей, имеющий нулевую гомологию и ограниченный справа, является чистым. Дать пример комплекса из свободных модулей ранга 1, имеющего нулевую гомологию, но не являющегося чистым.

б) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) комплекс C чистый;

β) $H(\operatorname{Homgr}_A(M, C)) = 0$ для всякого конечно представимого A-модуля M;

γ) существует направленная индуктивная система $(C^{(\alpha)})_{\alpha \in J}$ комплексов, *гомотопных нулю*, для которой $C = \varinjlim C^{(\alpha)}$.

(Чтобы увидеть, что условие β) влечет γ), свести доказательство к случаю, когда $C_i = 0$ при $i < i_0$, и представить C_{i_0} как индуктивный предел конечно представимых модулей.)

2. Пусть M – A-модуль. Подмодуль M′ в M называется *чистым*, если комплекс, определяемый точной последовательностью $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$, чистый (упражнение 1).

а) Показать, что когда A – кольцо *главных идеалов*, это понятие чистого подмодуля совпадает с введенным в VII, § 2, exercice 7 (Алгебра, VII, с. 37, упражнение 7).

б) Предположим, что A-модуль M плоский. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) подмодуль M′ чистый;

β) фактормодуль M/M′ плоский;

γ) $M' \cap \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}M'$ для всякого идеала $\mathfrak{a}$ в A.

3. Пусть M – A-модуль, n – целое число $\geqslant 1$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) M допускает конечное n-представление (с. 66, упражнение 6).

β) Для всякой направленной индуктивной системы $(N_\alpha)_{\alpha \in I}$ канонический гомоморфизм

$$\varinjlim \operatorname{Ext}_A^i(M, N_\alpha) \to \operatorname{Ext}_A^i(M, \varinjlim N_\alpha)$$

биективен при $i < n$.

γ) Для всякого семейства $(P_\beta)_{\beta \in J}$ правых A-модулей канонический гомоморфизм

$$\operatorname{Tor}_i^A\Big(\prod_{\beta \in J} P_\beta, M\Big) \to \prod_{\beta \in J} \operatorname{Tor}_i^A(P, M)$$

биективен при $i < n$.

δ) Для всякого множества I канонический гомоморфизм $A_d^I \otimes_A M \to M^I$ биективен и

$$\mathrm{Tor}_i^A(A_d^I, M) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < i < n.$$

(Применить индукцию по n, используя упражнение 18, с. 27.)

4. Пусть P – комплекс проективных A-модулей, нулевой справа, и n – такое целое число, что $H_i(P) = 0$ при $i < n$. Пусть M – левый A-модуль, N – правый A-модуль. Показать, что $H^i(\mathrm{Homgr}_A(P, M)) = 0$ и $H_i(N \otimes_A P) = 0$ при $i < n$ и что канонические гомоморфизмы

$$\lambda^n\colon H^n(\mathrm{Homgr}_A(P, M)) \to \mathrm{Hom}_A(H_n(P), M), \quad \gamma_n\colon N \otimes_A H_n(P) \to H_n(N \otimes_A P)$$

биективны.

¶ 5. Пусть P – проективный A-комплекс, нулевой справа, n – целое число $\geqslant 0$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Существуют комплекс P' из проективных A-модулей конечного типа, для которого $P'_i = 0$ при $i > n$ или $i < 0$, и такой морфизм $f\colon P' \to P$, что отображение $H_i(f)$ биективно при $i < n$ и сюръективно при $i = n$.

β) Для всякой направленной индуктивной системы A-модулей $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ канонический гомоморфизм

$$\varinjlim H^i(\mathrm{Homgr}_A(P, M_\alpha)) \to H^i(\mathrm{Homgr}_A(P, \varinjlim M_\alpha))$$

биективен при $i < n$ и инъективен при $i = n$.

γ) Для всякого семейства правых A-модулей $(N_\alpha)_{\alpha \in I}$ канонический гомоморфизм

$$H_i((\prod_\alpha N_\alpha) \otimes_A P) \to \prod_\alpha H_i(N_\alpha \otimes P)$$

биективен при $i < n$ и сюръективен при $i = n$.

(Чтобы доказать, что из α) следуют β) и γ), применить упражнение 4 к конусу морфизма f. Чтобы доказать, что из β) или γ) следует α), рассуждать индукцией по n, применяя упражнение 4, упражнение 18 (с. 27) и упражнение 10 (с. 48).)

6. Пусть A и B – две k-алгебры (ассоциативные и унитарные), M – левый A-модуль, P – левый B-модуль, N – (B, A)-бимодуль.

а) Показать, что существуют две спектральные последовательности (с. 49–51, упражнения 14–17) k-модулей ${}^1E$ и ${}^2E$, сходящиеся к одному и тому же градуированному k-модулю, для которых

$${}^1E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(M, \mathrm{Ext}_B^q(N, P)),$$

$${}^2E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(\mathrm{Tor}_q^A(N, M), P).$$

б) При помощи композиции гомоморфизмов γ и δ из упражнения 15, с. 50, определить k-гомоморфизм

$$\mu\colon \mathrm{Ext}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, P)) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Tor}^A(N, M), P).$$

Если модуль P инъективен, то показать, что μ – изоморфизм.

в) Если N – плоский A-модуль, то показать, что последовательность ${}^1E$ сходится к $\mathrm{Ext}_B(N \otimes_A M, P)$; если N – проективный B-модуль, то последовательность ${}^2E$ сходится к $\mathrm{Ext}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, P))$.

г) Пусть $\rho\colon A \to B$ – гомоморфизм k-алгебр. Показать, что существует спектральная последовательность E, сходящаяся к $\mathrm{Ext}_A(M, P)$, для которой

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(\mathrm{Tor}_q^A(B, M), P),$$

и спектральная последовательность ${}'E$, сходящаяся к $\mathrm{Ext}_A(P, M)$, для которой

$${}'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(P, \mathrm{Ext}_A^p(B, M)).$$

7. Пусть C – A-комплекс, M – A-модуль. Модулем расширений модуля M посредством комплекса C (соответственно комплекса C посредством модуля M) называется градуированный k-модуль

$$\mathfrak{Ext}_A(C, M) = H(\mathrm{Homgr}_A(C, I(M)))$$

(соответственно $\mathfrak{Ext}(M, C) = H(\mathrm{Homgr}_A(L(M), C))$).

Если $f\colon C \to C'$ – морфизм комплексов и $g\colon M \to M'$ – гомоморфизм A-модулей, то положим $\mathfrak{Ext}_A(f, g) = H(\mathrm{Homgr}(f, I(g)))$, $\mathfrak{Ext}_A(g, f) = H(\mathrm{Homgr}(L(g), f))$.

а) Если $f\colon C \to C'$ – гомологизм, то k-гомоморфизмы $\mathfrak{Ext}_A(f, 1)$ и $\mathfrak{Ext}_A(1, f)$ биективны. Если комплекс C проективен и ограничен справа (соответственно инъективен и ограничен слева), то градуированный k-модуль $\mathfrak{Ext}_A(C, M)$ (соответственно $\mathfrak{Ext}_A(M, C)$) изоморфен $H(\mathrm{Homgr}_A(C, M))$ (соответственно $H(\mathrm{Homgr}_A(M, C))$).

б) Пусть $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ – точная последовательность А-комплексов и $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность А-модулей. Показать, что существуют точные последовательности

$$\ldots \to \mathfrak{Ext}^n_A(C'', M) \to \mathfrak{Ext}^n_A(C, M) \to \mathfrak{Ext}^n_A(C', M) \to \mathfrak{Ext}^{n+1}_A(C'', M) \to \ldots,$$
$$\ldots \to \mathfrak{Ext}^n_A(C, M') \to \mathfrak{Ext}^n_A(C, M) \to \mathfrak{Ext}^n_A(C, M'') \to \mathfrak{Ext}^{n+1}_A(C, M') \to \ldots,$$
$$\ldots \to \mathfrak{Ext}^n_A(M, C') \to \mathfrak{Ext}^n_A(M, C) \to \mathfrak{Ext}^n_A(M, C'') \to \mathfrak{Ext}^{n+1}_A(M, C') \to \ldots,$$
$$\ldots \to \mathfrak{Ext}^n_A(M'', C) \to \mathfrak{Ext}^n_A(M, C) \to \mathfrak{Ext}^n_A(M', C) \to \mathfrak{Ext}^{n+1}_A(M'', C) \to \ldots,$$

в) Показать, что существует спектральная последовательность $''E$ (с. 49–51, упражнения 14–17), сходящаяся к $\mathfrak{Ext}_A(C, M)$, для которой $''E_2^{p,q} = H^q(\mathrm{Ext}^p_A(C, M))$. Если комплекс C ограничен справа, то показать, что существует спектральная последовательность $'E$, сходящаяся к $\mathfrak{Ext}_A(C, M)$, для которой $'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_A(H_q(C), M)$ (рассмотреть бикомплекс $\mathrm{Homgr}_A(C, I(M))$).

8. Пусть P, Q – два А-комплекса. Предположим, или что P ограничен справа и Q ограничен слева, или что существует такое целое число d, что всякий А-модуль обладает проективной резольвентой длины $\leqslant d$.

а) Показать, что существуют две спектральные последовательности $'E$ и $''E$, сходящиеся к одному и тому же градуированному k-модулю, для которых

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Ext}^q_A(P, Q)), \quad ''E_2^{p,q} = \bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Ext}^p_A(H_{q'}(P), H^{q''}(Q))$$

(где $\mathrm{Ext}^q_A(P, Q)$ обозначает комплекс, ассоциированный с бикомплексом $\bigoplus_{r,s} \mathrm{Ext}^q_A(P_r, Q^s)$).

б) Если комплекс P проективен или Q инъективен, то спектральная последовательность $''E$ сходится к $H(\mathrm{Homgr}_A(P, Q))$. Если $H(P)$ проективен или $H(Q)$ инъективен, то последовательность E сходится к $\mathrm{Homgr}_A(H(P), H(Q))$.

§ 6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕКАНОНИЧЕСКИХ РЕЗОЛЬВЕНТ

По-прежнему сохраняются соглашения из § 4.

1. Вычисление модулей $\mathrm{Tor}^A(P, M)$ и $\mathrm{Ext}_A(M, N)$

Пусть M, N – левые А-модули, P – правый А-модуль. Пусть, с другой стороны, a: $R \to M$ – левая резольвента для M, b: $S \to P$ – левая резольвента для P и c: $N \to E$ – правая резольвента для N.

Согласно предложениям 3 и 3bis, с. 55–56, существуют морфизмы комплексов α: $L(M) \to R$, β: $L(P) \to S$, γ: $E \to I(N)$, для которых $a \circ \alpha = p_M$, $b \circ \beta = p_P$, $\gamma \circ c = e_N$, и гомотопические классы морфизмов α, β, γ зависят только от заданных резольвент. Согласно предложению 3, с. 73, и предложению 3, с. 90, гомотопические классы морфизмов

$$\beta \otimes \alpha\colon L(P) \otimes_A L(M) \to S \otimes_A R,$$

$$\mathrm{Homgr}_A(\alpha, \gamma)\colon \mathrm{Homgr}_A(R, E) \to \mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))$$

зависят только от заданных резольвент, откуда при переходе к гомологии получаем градуированные k-гомоморфизмы степени 0

$$\psi(S, R)\colon \mathrm{Tor}^A(P, M) \to H(S \otimes_A R),$$

$$\varphi(R, E)\colon H(\mathrm{Homgr}_A(R, E)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N),$$

не зависящие от выбора α, β, γ.

Например, беря в качестве a, b, c тождественные отображения модулей M, P, N соответственно, мы приходим к гомоморфизмам $\psi(P, M)$: $\mathrm{Tor}^A(P, M) \to P \otimes_A M$ и $\varphi(M, N)$: $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, N)$, введенным в замечании 2 на с. 76 и в замечании 2 на с. 93.

Теорема 1. а) *Если одна из резольвент* R *или* S *плоская, то* $\psi(S, R)$ – *изоморфизм градуированных* k*-модулей.*

б) *Если резольвента* R *проективна или если резольвента* E *инъективна, то* $\varphi(R, E)$ – *изоморфизм градуированных* k*-модулей.*

а) Предположим, например, что резольвента R плоская, и выберем морфизмы α и β, как указано выше. Морфизм $\beta \otimes \alpha$ представляет собой композицию морфизмов

$$L(P) \otimes_A L(M) \xrightarrow{1_{L(P)} \otimes \alpha} L(P) \otimes_A R \xrightarrow{\beta \otimes 1_R} S \otimes_A R.$$

Так как комплекс L(P) (соответственно R) плоский и α (соответственно β) – гомологизм, то $1_{L(P)} \otimes \alpha$ (соответственно $\beta \otimes 1_R$) – также гомологизм согласно предложению 4, с. 75. Следовательно, $\beta \otimes \alpha$ – гомологизм и отображение $\psi(S, R) = H(\beta \otimes \alpha)$ биективно.

б) Рассуждаем аналогично, используя предложение 4, с. 92.

Следствие. *Если* R – *плоская резольвента модуля* M, *то гомоморфизм*

$$\psi(P, R): \mathrm{Tor}^A(P, M) \to H(P \otimes_A R)$$

биективен. Если R – *проективная резольвента модуля* M, *то гомоморфизм*

$$\varphi(R, N): H(\mathrm{Homgr}_A(R, N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N)$$

биективен. Если E – *инъективная резольвента модуля* M, *то гомоморфизм*

$$\varphi(M, E): H(\mathrm{Homgr}_A(M, E)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N)$$

биективен.

Замечание. Диаграмма k-модулей

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^A(P, M) & \xrightarrow{\psi(S, R)} & H(S \otimes_A R) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{P,M}} & & \downarrow{\scriptstyle H(\sigma(S, R))} \\ \mathrm{Tor}^{A^\circ}(M^\circ, P^\circ) & \xrightarrow{\psi(R^\circ, S^\circ)} & H(R^\circ \otimes_{A^\circ} S^\circ), \end{array}$$

где $\sigma_{P,M}$ и $\sigma(S, R)$ – *изоморфизмы коммутирования* (с. 78 и 71), коммутативна: это выводится посредством перехода к гомологии из коммутативной диаграммы комплексов

$$\begin{array}{ccc} L(P) \otimes_A L(M) & \xrightarrow{\beta \otimes \alpha} & S \otimes_A R \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma(L(P), L(M))} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(S, R)} \\ L(M^\circ) \otimes_{A^\circ} L(P^\circ) & \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} & R^\circ \otimes_{A^\circ} S^\circ \end{array}$$

(*"гомоморфизмы ψ совместимы с изоморфизмами коммутирования"*).

Аналогично, пусть $a_1: R_1 \to M$, $b_1: S_1 \to P$, $c_1: N \to E_1$ – морфизм комплексов, где R_1 и S_1 – *проективные и нулевые справа*, а E_1 – *инъективный и нулевой слева*. Согласно предложениям 3 и 3bis, с. 55–56, существуют морфизмы комплексов

$$\alpha_1: R_1 \to L(M), \quad \beta_1: S_1 \to L(P), \quad \gamma_1: I(N) \to E_1,$$

для которых $p_M \circ \alpha_1 = a_1$, $p_P \circ \beta_1 = b_1$, $\gamma_1 \circ e_N = c_1$, и, следовательно, морфизмы комплексов:

$$\beta_1 \otimes \alpha_1: S_1 \otimes_A R_1 \to L(P) \otimes_A L(M);$$

$$\mathrm{Homgr}_A(\alpha_1, \gamma_1): \mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N)) \to \mathrm{Homgr}_A(R_1, E_1),$$

и, посредством перехода к гомологии, градуированные k-линейные отображения степени 0:

$$\psi'(S_1, R_1): H(S_1 \otimes_A R_1) \to \mathrm{Tor}^A(P, M),$$

$$\varphi'(R_1, E_1): \mathrm{Ext}_A(M, N) \to H(\mathrm{Homgr}_A(R_1, E_1)),$$

относительно которых проверяется, как и выше, что они не зависят от выбора α_1, β_1, γ_1.

Предложение 1. *Если* a_1, b_1, c_1 – *гомологизмы, то* $\psi'(S_1, R_1)$ *и* $\varphi'(R_1, E_1)$ *представляют собой биекции, обратные биекциям* $\psi(S_1, R_1)$ *и* $\varphi(R_1, E_1)$ *соответственно.*

Действительно, $\alpha \circ \alpha_1$ есть морфизм комплекса R_1 в себя и $a_1 \circ (\alpha \circ \alpha_1) = p_M \circ \alpha_1 = a_1$, $b_1 \circ (\beta \circ \beta_1) = p_P \circ \beta_1 = b_1$. Согласно предложению 3, с. 55, морфизмы $\alpha \circ \alpha_1$ и $\beta \circ \beta_1$ гомотопны 1_{R_1} и 1_{S_1} соответственно. Поэтому, согласно предложению 3, с. 73, морфизм $f = (\beta \otimes \alpha) \circ (\beta_1 \otimes \alpha_1)$ комплекса $S_1 \otimes_A R_1$ в себя гомотопен $1_{S_1 \otimes_A R_1}$. Следовательно, $H(f) = 1$ и

$$\psi(S_1, R_1) \circ \psi'(S_1, R_1) = H(\beta \otimes \alpha) \circ H(\beta_1 \otimes \alpha_1) = H(f) = 1;$$

точно так же $\psi'(S_1, R_1) \circ \psi(S_1, R_1) = 1$. Для отображений φ и φ' рассуждения проводятся аналогичным образом.

Примеры. 1. Пусть a – элемент из A, для которого отображение $\varphi: x \to xa$ кольца A в себя инъективно ("a не является правым делителем нуля"). Используя резольвенту

$$0 \to A_s \xrightarrow{\varphi} A_s \to A/Aa \to 0,$$

мы видим, что для всякого правого A-модуля M

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, A/Aa) = 0 \quad \text{при} \quad i > 1$$

и что k-модуль $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/Aa)$ изоморфен $\mathrm{Ker}(a_M)$.

Аналогично, для всякого левого A-модуля M

$$\mathrm{Ext}_A^i(A/Aa, M) = 0 \quad \text{при} \quad i > 1$$

и k-модуль $\mathrm{Ext}_A^1(A/Aa, M)$ изоморфен M/aM.

2. Предположим, что кольцо A целостное: пусть K – поле частных кольца A и M – A-модуль. Используя плоскую резольвенту

$$0 \to A \to K \to K/A \to 0$$

(с. 13, пример 5), мы видим, что $\mathrm{Tor}_i^A(K/A, M) = 0$ при $i > 1$ и, кроме того, принимая во внимание II, p. 116, prop. 26 (ii), что A-модуль $\mathrm{Tor}_1^A(K/A, M)$ изоморфен подмодулю кручения модуля M.

3. Предположим, что A – нётерово локальное кольцо, обозначим через $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал и положим $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть M – A-модуль конечного типа, P – минимальная проективная резольвента для M (с. 59–60). Для всякого $n \geqslant 0$ векторные k-пространства $\mathrm{Tor}_n^A(k, M)$ и $\mathrm{Ext}_A^n(M, k)$ имеют конечную размерность, равную рангу свободного A-модуля P_n; действительно, комплексы $k \otimes_A P$ и $\mathrm{Homgr}_A(P, k)$ имеют нулевой дифференциал.

2. Вычисление отображений $\mathrm{Tor}^A(g, f)$ и $\mathrm{Ext}_A(f, h)$

Пусть $f: M \to M'$, $h: N' \to N$ – гомоморфизмы левых A-модулей, $g: P \to P'$ – гомоморфизм правых A-модулей, $a: R \to M$, $a': R' \to M'$, $b: S \to P$, $b': S' \to P'$ – левые резольвенты для M, M', P, P' соответственно, $c: N \to E$, $c': N' \to E'$ – правые резольвенты для N и N', $\tilde{f}: R \to R'$, $\tilde{g}: S \to S'$, $\tilde{h}: E' \to E$ – морфизмы комплексов, для которых

$$a' \circ \tilde{f} = f \circ a, \quad b \circ \tilde{g} = g \circ b, \quad \tilde{h} \circ c' = c \circ h.$$

Предложение 2. *Следующие две диаграммы коммутативны*:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}^A(P, M) & \xrightarrow{\psi(S,R)} & H(S \otimes_A R) \\
{\scriptstyle \mathrm{Tor}^A(g,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(\tilde{g} \otimes \tilde{f})} \\
\mathrm{Tor}^A(P', M') & \xrightarrow{\psi(S',R')} & H(S' \otimes_A R'),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H(\mathrm{Homgr}_A(R', E')) & \xrightarrow{\varphi(R',E')} & \mathrm{Ext}_A(M', N') \\
{\scriptstyle H(\mathrm{Homgr}_A(\tilde{f}, \tilde{h}))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_A(f,h)} \\
H(\mathrm{Homgr}_A(R, E)) & \xrightarrow{\varphi(R,E)} & \mathrm{Ext}_A(M, N).
\end{array}$$

Пусть $\alpha\colon \mathrm{L}(\mathrm{M}) \to \mathrm{R}$, $\alpha'\colon \mathrm{L}(\mathrm{M}') \to \mathrm{R}'$, $\gamma\colon \mathrm{L}(\mathrm{P}) \to \mathrm{S}$, $\gamma'\colon \mathrm{L}(\mathrm{P}') \to \mathrm{S}'$ — морфизмы комплексов, для которых

$$a \circ \alpha = p_{\mathrm{M}},\ a' \circ \alpha' = p_{\mathrm{M}'},\quad b \circ \gamma = p_{\mathrm{P}},\quad b' \circ \gamma' = p_{\mathrm{P}'}.$$

По определению, гомоморфизм $\mathrm{H}(\tilde{g} \otimes \tilde{f}) \circ \psi(\mathrm{S}, \mathrm{R})$ равен

$$\mathrm{H}(\tilde{g} \otimes \tilde{f}) \circ \mathrm{H}(\gamma \otimes \alpha) = \mathrm{H}((\tilde{g} \circ \gamma) \otimes (\tilde{f} \circ \alpha)),$$

тогда как гомоморфизм $\psi(\mathrm{S}', \mathrm{R}') \circ \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}(g, f)$ равен

$$\mathrm{H}(\gamma' \otimes \alpha') \circ \mathrm{H}(\mathrm{L}(g) \otimes \mathrm{L}(f)) = \mathrm{H}((\gamma' \circ \mathrm{L}(g)) \otimes (\alpha' \circ \mathrm{L}(f))).$$

С другой стороны, $\alpha' \circ \mathrm{L}(f)$ и $\tilde{f} \circ \alpha$ — это два морфизма из $\mathrm{L}(\mathrm{M})$ в R', для которых $a' \circ (\alpha' \circ \mathrm{L}(f)) = p_{\mathrm{M}'} \circ \mathrm{L}(f) = f \circ p_{\mathrm{M}} = f \circ a \circ \alpha = a' \circ (\tilde{f} \circ \alpha)$. Согласно предложению 3, с. 55, морфизмы $\alpha' \circ \mathrm{L}(f)$ и $\tilde{f} \circ \alpha$ гомотопны; точно так же гомотопны морфизмы $\gamma' \circ \mathrm{L}(g)$ и $\tilde{g} \circ \gamma$, следовательно, морфизмы $(\gamma' \circ \mathrm{L}(g)) \otimes (\alpha' \circ \mathrm{L}(f))$ и $(\tilde{g} \circ \gamma) \otimes (\tilde{f} \circ \alpha)$ гомотопны, согласно предложению 3, с. 73. Таким образом,

$$\mathrm{H}(\tilde{g} \otimes \tilde{f}) \circ \psi(\mathrm{S}, \mathrm{R}) = \mathrm{H}((\tilde{g} \circ \gamma) \otimes (\tilde{f} \circ \alpha)) =$$
$$= \mathrm{H}((\gamma' \circ \mathrm{L}(g)) \otimes (\alpha' \circ \mathrm{L}(f))) = \psi(\mathrm{S}', \mathrm{R}') \circ \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}(g, f).$$

Относительно второй диаграммы рассуждения проводятся аналогичным образом.

Замечание. Рассмотрим также коммутативные диаграммы морфизмов комплексов

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}_1 & \xrightarrow{a_1} & \mathrm{M} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{R}_1' & \xrightarrow{a_1'} & \mathrm{M}', \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{S}_1 & \xrightarrow{b_1} & \mathrm{P} \\ {\scriptstyle \tilde{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathrm{S}_1' & \xrightarrow{b_1'} & \mathrm{P}', \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{N}' & \xrightarrow{c_1'} & \mathrm{E}' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}} \\ \mathrm{N} & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{E}_1, \end{array}$$

где комплексы R_1, R_1', S_1, S_1' проективны и нулевые справа, а комплексы E_1, E_1' инъективны и нулевые слева. Тогда

$$\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}(g, f) \circ \psi'(\mathrm{S}_1, \mathrm{R}_1) = \psi'(\mathrm{S}_1', \mathrm{R}_1') \circ \mathrm{H}(\tilde{g} \otimes \tilde{f}),$$
$$\varphi'(\mathrm{R}_1, \mathrm{E}_1) \circ \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}(f, g) = \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_{\mathrm{A}}(\tilde{f}, \tilde{h})) \circ \varphi'(\mathrm{R}_1', \mathrm{E}_1'),$$

что доказывается аналогично предложению 2.

3. Вычисление связывающих гомоморфизмов

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{R}' & \xrightarrow{\tilde{u}} & \mathrm{R} & \xrightarrow{\tilde{v}} & \mathrm{R}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle a'}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle a''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{M}' & \xrightarrow{u} & \mathrm{M} & \xrightarrow{v} & \mathrm{M}'' & \longrightarrow & 0, \end{array} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ \\ (2) \end{array}$$

где первая строка (1) — точная последовательность комплексов левых A-модулей, вторая строка (2) — точная последовательность левых A-модулей и где вертикальные стрелки обозначают левые резольвенты.

Предложение 3. а) *Пусть* P — A-*модуль*, $b\colon \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ — *левая резольвента для* P; *предположим, что последовательность комплексов k-модулей*

$$0 \to \mathrm{S} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}' \xrightarrow{1_{\mathrm{S}} \otimes \tilde{u}} \mathrm{S} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R} \xrightarrow{1_{\mathrm{S}} \otimes \tilde{v}} \mathrm{S} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}'' \to 0 \qquad (3)$$

точная. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M}'') & \xrightarrow{\partial(\mathrm{P}, (2))} & \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M}') \\ {\scriptstyle \psi(\mathrm{S}, \mathrm{R}'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi(\mathrm{S}, \mathrm{R}')} \\ \mathrm{H}(\mathrm{S} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}'') & \xrightarrow{\partial((3))} & \mathrm{H}(\mathrm{S} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}'). \end{array}$$

б) *Пусть* N – *левый* A-*модуль*, c: N → E – *правая резольвента для* N; *предположим, что последовательность комплексов* k-*модулей*

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(R'', E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}_A(\tilde{r}, 1)} \mathrm{Homgr}_A(R, E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}_A(\tilde{u}, 1)} \mathrm{Homgr}_A(R', E) \to 0 \quad (4)$$

точная. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(R', E)) & \xrightarrow{\partial((4))} & \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(R'', E)) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(R', E)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(R'', E)} \\ \mathrm{Ext}_A(M', N) & \xrightarrow{\delta((2), N)} & \mathrm{Ext}_A(M'', N)\,. \end{array}$$

Докажем, например, а). Пусть β: L(P) → S – морфизм комплексов, для которого $b \circ \beta = p_P$; рассмотрим диаграмму k-комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & S \otimes_A R' & \xrightarrow{1 \otimes \tilde{u}} & S \otimes_A R & \xrightarrow{1 \otimes \tilde{v}} & S \otimes_A R'' \to 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \beta \otimes 1_{R'}} & & \uparrow{\scriptstyle \beta \otimes 1_R} & & \uparrow{\scriptstyle \beta \otimes 1_{R''}} \\ 0 & \to & \mathrm{L}(P) \otimes_A R' & \xrightarrow{1 \otimes \tilde{u}} & \mathrm{L}(P) \otimes_A R & \xrightarrow{1 \otimes \tilde{v}} & \mathrm{L}(P) \otimes_A R'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes a'} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes a} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes a''} \\ 0 & \to & \mathrm{L}(P) \otimes_A M' & \xrightarrow{1 \otimes u} & \mathrm{L}(P) \otimes_A M & \xrightarrow{1 \otimes v} & \mathrm{L}(P) \otimes_A M'' \to 0\,. \end{array}$$

Она коммутативна и имеет точные строки (согласно предложению для первой строки и в силу того, что комплекс L(P) плоский, для двух других). Имеем, следовательно, коммутативную диаграмму (с. 36, предложение 2, и с. 78, определение 2):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}(S \otimes_A R'') & \xrightarrow{\partial((3))} & \mathrm{H}(S \otimes_A R') \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}(\beta \otimes 1)} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}(\beta \otimes 1)} \\ \mathrm{H}(\mathrm{L}(P) \otimes_A R'') & \longrightarrow & \mathrm{H}(\mathrm{L}(P) \otimes_A R') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}(1 \otimes a'')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}(1 \otimes a')} \\ \mathrm{H}(\mathrm{L}(P) \otimes_A M'') & \longrightarrow & \mathrm{H}(\mathrm{L}(P) \otimes_A M') \\ \uparrow{\scriptstyle \psi_P(M'')} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_P(M')} \\ \mathrm{Tor}(P, M'') & \xrightarrow{\partial(P, (2))} & \mathrm{Tor}(P, M')\,. \end{array}$$

Согласно предложению 4, с. 75, отображения $\mathrm{H}(1 \otimes a'')$ и $\mathrm{H}(1 \otimes a')$ биективны; с другой стороны, по определению гомоморфизмов ψ, имеем: $\mathrm{H}(\beta \otimes 1) \circ \psi(\mathrm{L}(P), R'') = \psi(S, R'')$ и $\mathrm{H}(1 \otimes a'') \circ \psi(\mathrm{L}(P), R'') = \psi(\mathrm{L}(P), M'') = \psi_P(M'')$, следовательно

$$\psi(S, R'') = \mathrm{H}(\beta \otimes 1) \circ \mathrm{H}(1 \otimes a'')^{-1} \circ \psi_P(M'');$$

точно так же, $\psi(S, R') = \mathrm{H}(\beta \otimes 1) \circ \mathrm{H}(1 \otimes a')^{-1} \circ \psi_P(M')$, и искомое утверждение $\partial((3)) \circ \psi(S, R'') = \psi(S, R') \circ \partial(P, (2))$ следует из коммутативности предыдущей диаграммы.

Замечания 1. Используя изоморфизмы коммутирования, можно вывести из а) аналогичное утверждение, получаемое заменой ролей двух аргументов в тензорном произведении.

2. В обозначениях утверждения а) предположим, что либо резольвента S *плоская*, либо резольвенты R, R′, R″ *плоские*; тогда, с одной стороны, последовательность (3) точная (с. 79, следствие 2), и можно применять предложение 3; с другой стороны, отображение $\psi(S, R')$ биективно (теорема 1), следовательно,

$$\partial(P, (2)) = \psi(S, R')^{-1} \circ \partial((3)) \circ \psi(S, R'').$$

3. В обозначениях утверждения б) предположим, что либо резольвента E *инъективна*, либо резольвенты R, R′, R″ *проективны*; тогда, с одной стороны, последовательность (4) точная (с. 89, предложение 2), и можно применять предложение 3; с другой сторо-

ны, отображение $\varphi(R', E)$ биективно (теорема 1); следовательно,

$$\delta((2), N) = \varphi(R'', E) \circ \partial((4)) \circ \varphi(R', E)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{r} & N & \xrightarrow{s} & N'' & \longrightarrow & 0 \qquad (5) \\ & & \downarrow{\scriptstyle c'} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c''} & & \\ 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\tilde{r}} & E & \xrightarrow{\tilde{s}} & E'' & \longrightarrow & 0 \qquad (6) \end{array}$$

в которой первая строка (5) — точная последовательность левых A-модулей, вторая строка (6) — точная последовательность комплексов левых A-модулей и вертикальные стрелки обозначают правые резольвенты. Рассуждая, как в предложении 3, можно доказать следующее предложение:

Предложение 4. *Пусть* M — *левый* A-*модуль, а* a: $R \to M$ — *такая левая резольвента для* M, *что последовательность*

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(R, E') \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(\tilde{s}, 1)} \mathrm{Homgr}_A(R, E) \xrightarrow{\mathrm{Homgr}(\tilde{r}, 1)} \mathrm{Homgr}_A(R, E'') \to 0 \qquad (7)$$

точная. Тогда, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(R, E'')) & \xrightarrow{\partial((7))} & \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(R, E')) \\ {\scriptstyle \varphi(R, E'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(R, E')} \\ \mathrm{Ext}_A(M, N'') & \xrightarrow{\delta(M, (5))} & \mathrm{Ext}_A(M, N'). \end{array}$$

Замечания. 4. Если резольвента R проективна или резольвенты E, E′, E″ инъективны, то последовательность (7) точная (с. 89, предложение 2); кроме того, отображение $\varphi(R, E'')$ биективно (теорема 1); следовательно,

$$\delta(M, (5)) = \varphi(R, E') \circ \partial((7)) \circ \varphi(R, E'')^{-1}.$$

5. Мы предоставляем читателю сформулировать и доказать предложения, аналогичные предложениям 3 и 4, относительно гомоморфизмов ψ' и φ.

4. Конечность модулей расширений и кручения

Пусть M — левый A-модуль, I — направленное предупорядоченное множество, (N_i, u_{ji}) — индуктивная система левых A-модулей относительно I, $N = \varinjlim N_i$ — ее индуктивный предел, u_i: $N_i \to N$, $i \in I$, — канонические отображения. Тогда $(\mathrm{Ext}_A(M, N_i), \mathrm{Ext}_A(1_M, u_{ji}))$ — индуктивная система k-модулей и $(\mathrm{Ext}_A(1_M, u_i))$ — индуктивная система отображений, индуктивный предел которой представляет собой гомоморфизм градуированных k-модулей

$$\varinjlim \mathrm{Ext}_A(M, N_i) \to \mathrm{Ext}_A(M, \varinjlim N_i), \qquad (8)$$

называемый *каноническим*.

Предложение 5. *Если кольцо* A *нётерово слева и если* M — A-*модуль конечного типа, то канонический гомоморфизм* (8) *биективен.*

Действительно, пусть (с. 59, предложение 6) p: $L \to M$ — свободная резольвента для M, в которой L_n — модуль конечного типа для каждого n. Канонический морфизм k-комплексов

$$u\colon \varinjlim \mathrm{Homgr}_A(L, N_i) \to \mathrm{Homgr}_A(L, \varinjlim N_i)$$

биективен, следовательно, таков же гомоморфизм

$$\varinjlim \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(L, N_i)) \to \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(L, \varinjlim N_i)),$$

получаемый из гомоморфизмов $\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}(1, u_i))$ (с. 34, предложение 1). Заканчиваем вывод теперь ссылкой на предложение 2 (с. 105) и теорему 1 (с. 103).

Предложение 6. *Пусть* B — *кольцо и* N — (A, B)-*бимодуль, являющийся нётеровым* B-*модулем* (*соответственно,* B-*модулем конечной длины*).

а) *Предположим, что кольцо* A *нётерово справа, и пусть* M *– правый* A*-модуль конечного типа. Тогда* B*-модули* (с. 85) $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ *нётеровы (соответственно, конечной длины).*

б) *Предположим, что кольцо* A *нётерово слева, и пусть* M *– левый* A*-модуль конечного типа. Тогда* B*-модули* (с. 100) $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ *нётеровы (соответственно конечной длины).*

Выберем свободную резольвенту p: $L \to M$, в которой каждый из A-модулей L_n конечного типа (с. 59, предложение 6), и пусть C – комплекс B-модулей $L \otimes_A N$ в случае а), $\mathrm{Homgr}_A(L, N)$ в случае б). Каждый из B-модулей C_n изоморфен произведению конечного числа экземпляров модуля N, следовательно, нётеров (соответственно, конечной длины); отсюда следует, что тем же свойством обладают модули $H_n(C)$. Но согласно теореме 1, с. 103, эти модули изоморфны $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ в случае а), $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ в случае б).

Следствие. *Пусть* ρ: $A \to B$ *– гомоморфизм нётеровых коммутативных колец,* M *–* A*-модуль конечного типа,* N *–* B*-модуль. Если* N *–* B*-модуль конечного типа (соответственно конечной длины), то тем же свойством обладают* B*-модули* $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ *и* $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$.

5. Гомоморфизмы $\mathrm{Tor}^B(P, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q)$ и $\mathrm{Ext}_B(M, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Ext}_B(M, N \otimes_A Q)$

Пусть B – кольцо, N – (B, A)-бимодуль, M – левый B-модуль, P – правый B-модуль, Q – левый A-модуль.

Согласно сказанному на с. 71, мы имеем гомоморфизм

$$\gamma_1\colon\ H(L(P) \otimes_B N) \otimes_A Q \to H(L(P) \otimes_B N \otimes_A Q);$$

кроме того (с. 76, предложение 5), имеем изоморфизмы

$$\psi_P(N) \otimes 1_Q\colon\ \mathrm{Tor}^B(P, N) \otimes_A Q \to H(L(P) \otimes_B N) \otimes_A Q,$$

$$\psi_P(N \otimes_A Q)\colon\ \mathrm{Tor}^P(P, N \otimes_A Q) \to H(L(P) \otimes_B N \otimes_A Q).$$

Градуированный гомоморфизм степени 0, называемый *каноническим*,

$$\mathrm{Tor}^B(P, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q). \tag{9}$$

определяется как композиция $\psi_P(N \otimes_A Q)^{-1} \circ \gamma_1 \circ (\psi_P(N) \otimes 1_Q)$.

Точно так же из канонического морфизма комплексов

$$\alpha\colon\ \mathrm{Homgr}_B(L(M), N) \otimes_A Q \to \mathrm{Homgr}_B(L(M), N \otimes_A Q)$$

получаем гомоморфизм $H(\alpha)$; имеем канонический гомоморфизм (с. 71)

$$\gamma_2\colon\ H(\mathrm{Homgr}_B(L(M), N)) \otimes_A Q \to H(\mathrm{Homgr}_B(L(M), N) \otimes_A Q)$$

и изоморфизмы (с. 93, предложение 5),

$$\varphi_M(N) \otimes 1_Q\colon\ H(\mathrm{Homgr}_B(L(M), N)) \otimes_A Q \to \mathrm{Ext}_B(M, N) \otimes_A Q,$$

$$\varphi_M(N \otimes_A Q)\colon\ H(\mathrm{Homgr}_B(L(M), N \otimes_A Q) \to \mathrm{Ext}_B(M, N \otimes_A Q).$$

Градуированный гомоморфизм степени 0, называемый *каноническим*,

$$\mathrm{Ext}_B(M, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Ext}_B(M, N \otimes_A Q) \tag{10}$$

определяется как композиция

$$\varphi_M(N \otimes_A Q) \circ H(\alpha) \circ \gamma_2 \circ (\varphi_M(N) \otimes 1_Q)^{-1}.$$

Предложение 7. а) *Если* A*-модуль* Q *плоский, то гомоморфизм* (9) *биективен.*

б) *Если* A*-модуль* Q *проективен и конечного типа, то гомоморфизм* (10) *биективен.*

в) *Если* A*-модуль* Q *плоский, кольцо* B *нётерово и* B*-модуль* M *конечного типа, то гомоморфизм* (10) *биективен.*

а) Если модуль Q плоский, то гомоморфизм γ_1 биективен (с. 74, следствие 2).

б) Если Q – проективный модуль конечного типа, то он плоский, следовательно, гомоморфизм γ_2 биективен, и, кроме того, морфизм α биективен (II, p. 75, prop. 2, *a*)).

в) В предположениях утверждения в) гомоморфизм γ_2 биективен, поскольку модуль Q плоский. Кроме того, (с. 59, предложение 6) существует резольвента L для M, в которой каждый модуль L_n свободен и конечного типа; пусть u: $L(M) \to L$ – гомотопизм (с. 55, следствие предложения 3); в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homgr}_B(L(M), N) \otimes_A Q & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Homgr}_B(L(M), N \otimes_A Q) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Homgr}_B(L, N) \otimes_A Q & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathrm{Homgr}_B(L, N \otimes_A Q)\,. \end{array}$$

вертикальные стрелки, получаемые из u, представляют собой гомотопизмы (с. 73, предложение 3, и с. 90, предложение 3) и отображение $\bar{\alpha}$ биективно (II, p. 75, prop. 2 (ii)). Следовательно, отображение $H(\alpha)$ биективно и гомоморфизм (10) биективен.

6. Гомоморфизмы $\mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q) \to \mathrm{Tor}^A(P \otimes_B N, Q)$ и $\mathrm{Ext}_A(Q, \mathrm{Hom}_B(N, M)) \to \mathrm{Ext}_B(N \otimes_A Q, M)$

Сохраним предыдущие обозначения и *предположим, что* N – *плоский модуль над* A. Тогда морфизм $N \otimes_A L(Q) \xrightarrow{1 \otimes p_Q} N \otimes_A Q$ является гомологизмом (с. 75, предложение 4), откуда получаем гомоморфизмы

$\psi(P, N \otimes_A L(Q))$: $\mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q) \to H(P \otimes_B N \otimes_A L(Q))$,

$\varphi(N \otimes_A L(Q), M)$: $H(\mathrm{Homgr}_B(N \otimes_A L(Q), M)) \to \mathrm{Ext}_B(N \otimes_A Q, M)$.

Используя далее *изоморфизмы*

$\bar{\psi}_Q(P \otimes_B N)$: $\mathrm{Tor}^A(P \otimes_B N, Q) \to H(P \otimes_B N \otimes_A L(Q))$,

β: $\mathrm{Homgr}_A(L(Q), \mathrm{Hom}_B(N, M)) \to \mathrm{Homgr}_B(N \otimes_A L(Q), M)$,

$\varphi_Q(\mathrm{Hom}_B(N, M))$: $H(\mathrm{Homgr}_A(L(Q), \mathrm{Hom}_B(N, M))) \to \mathrm{Ext}_A(Q, \mathrm{Hom}_B(N, M))$,

мы получаем градуированные гомоморфизмы степени 0, называемые *каноническими*:

$$\mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q) \to \mathrm{Tor}^A(P \otimes_B N, Q), \tag{11}$$

$$\mathrm{Ext}_A(Q, \mathrm{Hom}_B(N, M)) \to \mathrm{Ext}_B(N \otimes_A Q, M). \tag{12}$$

Предложение 8. а) *Если* N – *плоский модуль над* A *и над* B, *то гомоморфизм* (11) *биективен.*

б) *Если* N – *плоский модуль под* A *и проективный над* B, *то гомоморфизм* (12) *биективен.*

Действительно, модуль $N \otimes_A L(Q)$ изоморфен прямой сумме копий модуля N, а потому является плоским (соответственно проективным) B-модулем, когда B-модуль N плоский (соответственно проективный); затем применяем теорему 1 (с. 103).

7. Гомоморфизмы $B \otimes_A \mathrm{Tor}^A(E, F) \to \mathrm{Tor}^B(E \otimes_A B, B \otimes_A F)$ и $B \otimes_A \mathrm{Ext}_A(E, F) \to \mathrm{Ext}_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F)$

В этом пункте мы предполагаем, что кольцо A *коммутативно*; считаем заданными гомоморфизм колец ρ: $A \to B$, для которого $\rho(A)$ содержится в центре B, и два A-модуля E и F. Имеет место канонический изоморфизм комплексов A-модулей

u: $B \otimes_A (L(E) \otimes_A L(F)) \to (L(E) \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A L(F))$;

с другой стороны, так как $L(E) \otimes_A B$ и $B \otimes_A L(F)$ – *свободные* B-комплексы, имеем канонический гомоморфизм градуированных A-модулей (с. 104)

$\psi'(L(E) \otimes_A B, B \otimes_A L(F))$: $H(L(E) \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A L(F)) \to \mathrm{Tor}^B(E \otimes_A B, B \otimes_A F)$;

наконец, мы располагаем гомоморфизмом (с. 71)

γ: $B \otimes_A \mathrm{Tor}^A(E, F) \to H(B \otimes_A L(E) \otimes_A L(F))$.

Канонический гомоморфизм градуированных B-модулей

$$B \otimes_A \mathrm{Tor}^A(E, F) \to \mathrm{Tor}^B(E \otimes_A B, B \otimes_A F) \tag{13}$$

определяется как композиция $\psi'(L(E) \otimes_A B, B \otimes_A L(F)) \circ H(u) \circ \gamma$.

Предложение 9. *Если* B – *плоский модуль над* A, *то гомоморфизм* (13) *биективен.*

Действительно, гомоморфизм $\psi'(L(E) \otimes_A B, B \otimes_A L(F))$ биективен (с. 104, предложение 1) и гомоморфизм γ биективен (с. 74, следствие 2).

Предположим, что B – *плоский* модуль над A. Подставляя в гомоморфизм (12) E вместо Q, B вместо N и $B \otimes_A F$ вместо M, получаем гомоморфизм

$$\mathrm{Ext}_A(E, B \otimes_A F) \to \mathrm{Ext}_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F),$$

который биективен согласно предложению 8. Подставляя в гомоморфизм (10) E вместо M, F вместо N, A вместо B, B вместо Q и переставляя множители тензорных произведений, получаем гомоморфизм B-модулей

$$B \otimes_A \mathrm{Ext}_A(E, F) \to \mathrm{Ext}_B(E, B \otimes_A F),$$

откуда посредством композиции получаем гомоморфизм

$$B \otimes_A \mathrm{Ext}_A(E, F) \to \mathrm{Ext}_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F), \tag{14}$$

называемый *каноническим.*

Предложение 10. *Гомоморфизм* (14) *биективен в следующих случаях:*

а) B – *проективный* A-*моодуль конечного типа*;

б) B – *плоский* A-*модуль,* A *нётерово и* E – A-*модуль конечного типа.*

Это следует из предложения 7 (с. 109).

8. Приложение: гомология и когомология групп

Пусть G – группа, $\mathbf{Z}^{(G)}$ – ее алгебра над $\mathbf{Z}$ (III, p. 19). Напомним (см. III, p. 20, exemple), что если M – коммутативная группа, то задание действия группы G на M (т.е. гомоморфизма τ: G → Aut(M)) равносильно заданию структуры левого $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля на аддитивной группе M. В частности, мы будем рассматривать группу $\mathbf{Z}$ как левый $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль, наделив ее тривиальным действием.

Определение 1. Пусть M – левый (соответственно правый) $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль, n – целое число $\geqslant 0$. Группа $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}^{(G)}}(\mathbf{Z}, M)$ (соответственно $\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{Z}^{(G)}}(M, \mathbf{Z})$) обозначается через $H^n(G, M)$ (соответственно $H_n(G, M)$) и называется *n-ой группой когомологии* (соответственно *гомологии*) *группы* G *с коэффициентами в* M.

Стандартная резольвента (с. 62) $B(\mathbf{Z}^{(G)}, \mathbf{Z})$ представляет собой свободную резольвенту $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля $\mathbf{Z}$; отсюда следует, что группы $H^n(G, M)$ (соответственно $H_n(G, M)$) отождествляются с группами гомологии комплекса $\mathrm{Homgr}_{\mathbf{Z}^{(G)}}(B(\mathbf{Z}^{(G)}, \mathbf{Z}), M)$ (соответственно $M \otimes_{\mathbf{Z}^{(G)}} B(\mathbf{Z}^{(G)}, \mathbf{Z})$).

Используя канонический изоморфизм $(\mathbf{Z}^{(G)})^{\otimes n}$ на $\mathbf{Z}^{(G^n)}$ (III, p. 36) и свойства расширения скаляров (II, p. 82), заключаем, что группа $H^n(G, M)$ канонически изоморфна группе гомологии верхней степени n комплекса $C(G, M)$, определяемого следующим образом: $C^n(G, M) = 0$ при $n < 0$; при $n \geqslant 0$ $C^n(G, M)$ представляет собой Z-модуль отображений множества G^n в M; при $n \geqslant 0$ дифференциал d^n: $C^n(G, M) \to C^{n+1}(G, M)$ определяется по формуле

$$(d^n f)(g_0, \ldots, g_n) = g_0 \cdot f(g_1, \ldots, g_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) + (-1)^{n+1} f(g_0, \ldots, g_{n-1})$$

для всех $f \in C^n(G, M)$ и $g_0, \ldots, g_n \in G$.

Аналогично, группа $H_n(G, M)$ отождествляется с группой гомологии степени n комплекса $C'(G, M)$, где $C'_n(G, M) = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{(G^n)}$ при $n \geqslant 0$, $C'_n(G, M) = 0$ при $n < 0$, при-

чем дифференциал d_n: $C'_n(G, M) \to C'_{n-1}(G, M)$ определяется по формуле:

$$d_n(m \otimes e_{g_1,\dots,g_n}) = m \cdot g_1 \otimes e_{g_2,\dots,g_n} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes e_{g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n} + (-1)^n m \otimes e_{g_1,\dots,g_{n-1}}$$

для всех $n \geqslant 1$, $m \in M$, и $g_1, \dots, g_n \in G$.

Примеры. 1. Прямо из определения следует, что группа $H^0(G, M)$ изоморфна подмодулю элементов из M, инвариантных относительно действия G, а группа $H_0(G, M)$ – фактормодулю модуля M по подмодулю, порожденному элементами $m \cdot g - m$ для $m \in M$, $g \in G$.

2. Из предыдущего следует, что группа $H^1(G, M)$ изоморфна Z-модулю $Z^1(G,M)/B^1(G,M)$, где $Z^1(G, M)$ – Z-модуль отображений f из G в M, удовлетворяющих условию:

$$f(g_1g_2) = g_1 \cdot f(g_2) + f(g_1) \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in G,$$

а $B^1(G, M)$ – Z-подмодуль в $Z^1(G, M)$, образованный теми отображениями f, для которых существует такой элемент $m \in M$, что

$$f(g) = g \cdot m - m \quad \text{для всех } g \in G.$$

$Z^1(G, M)$ иногда называют Z-модулем скрещенных гомоморфизмов группы G в M, а $B^1(G, M)$ – подмодулем главных скрещенных гомоморфизмов.

Обозначим через τ: $G \to \mathrm{Aut}(M)$ гомоморфизм, задающий действие группы G, рассмотрим внешнее полупрямое произведение $M \times_\tau G$ и расширение ξ_τ: $M \xrightarrow{i} M \times_\tau G \xrightarrow{p} G$ (1, p. 64). Пусть e: $G \to M \times_\tau G$ – отображение, для которого $p \circ e = 1_G$; тогда $e = (f, 1_G)$, где $f \in C^1(G, M)$. Для того чтобы отображение e было гомоморфизмом (т.е. сечением расширения ξ_τ), необходимо и достаточно, чтобы $f \in Z^1(G, M)$. Для того чтобы два сечения расширения ξ_τ были сопряжены посредством элемента из $i(M)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие скрещенные гомоморфизмы определяли один и тот же класс в $H^1(G, M)$.

Когда G действует тривиально на M, $B^1(G, M) = 0$ и группа $H^1(G, M)$ изоморфна Z-модулю гомоморфизмов группы G в M.

3. Аналогично, группа $H^2(G, M)$ изоморфна Z-модулю $Z^2(G, M)/B^2(G, M)$, где $Z^2(G, M)$ – Z-модуль отображений f множества $G \times G$ в M, удовлетворяющих условию:

$$g_1 \cdot f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0$$

для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$, и $B^2(G, M)$ – Z-подмодуль в $Z^2(G, M)$, образованный теми отображениями f, для которых существует такое отображение h из G в M,

$$f(g_1, g_2) = g_1 \cdot h(g_2) - h(g_1g_2) + h(g_1)$$

для любых $g_1, g_2 \in G$.

Мы приходим, таким образом, к определению группы $H^2(G, M)$, данному в VIII, App. Отсюда следует, в частности, что существует канонический изоморфизм группы $H^2(G, M)$ на группу классов расширений группы G посредством M (VIII, App.).

4. Пусть M – Z-модуль, который рассматривается как правый $Z^{(G)}$-модуль с тривиальным действием группы G. Группа $H_1(G, M)$ изоморфна фактормодулю Z-модуля $M \otimes_Z Z^{(G)}$ по Z-подмодулю, порожденному элементами $m \otimes (e_{g_1g_2} - e_{g_1} - e_{g_2})$ для $m \in M$, $g_1, g_2 \in G$, откуда легко следует, что группа $H_1(G, M)$ изоморфна $M \otimes_Z (G/(G, G))$.

Обозначим через σ антиавтоморфизм алгебры $Z^{(G)}$, определяемый тем, что $\sigma(e_g) = e_{g^{-1}}$ для $g \in G$. Всякий левый $Z^{(G)}$-модуль может рассматриваться с помощью σ как правый $Z^{(G)}$-модуль и обратно. Это позволяет, например, определить группы $H_q(G, M)$ для *левого* $Z^{(G)}$-модуля M, положив $H_q(G, M) = H_q(G, \sigma_*(M)) = \mathrm{Tor}_q^{Z^{(G)}}(Z, M)$.

Лемма 1. *Пусть* M – Z-*модуль*; *обозначим через* M^G *группу* $\mathrm{Hom}_Z(Z^{(G)}, M)$, *наделенную естественной структурой левого* $Z^{(G)}$-*модуля. Тогда*

$$H^i(G, M^G) = 0 \quad \text{при } i \geqslant 1.$$

Действительно, из предложения 8, б) (с. 110), примененного к $A = N = Z^{(G)}$ и $B = Q = Z$, получаем, что имеет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_{Z^{(G)}}(Z, M^G) \to \mathrm{Ext}_Z(Z, M),$$

откуда следует лемма.

Предложение 11. *Пусть* L – *расширение Галуа конечной степени поля* K *с группой Галуа* G.

а) $H^i(G, L) = 0$ *при* $i \geqslant 1$.

б) $H^1(G, L^*) = 0$.

в) *Группа* $H^2(G, L^*)$ *канонически изоморфна группе* $\mathrm{Br}(K, L)$ (VIII, § 13).

Теорема о нормальном базисе (V, § 10, n°9, th. 6; Алгебра, V, с. 180, теорема 5) показывает, что L как $Z^{(G)}$-модуль изоморфно $K^G = \mathrm{Hom}_Z(Z^{(G)}, K)$; утверждение а) следует теперь из леммы 1. Если принять во внимание пример 2, утверждение б) будет следовать из V, § 10, n°5, prop. 9, cor. 1; наконец, утверждение в) доказано в VIII, § 13.

Упражнения

1. Пусть ρ: $A \to B$ – гомоморфизм колец, M, N – два левых B-модуля, P – правый B-модуль.

а) Пусть L_B (соответственно L_A) – проективная резольвента B-модуля (соответственно A-модуля) M. Показать, что существует A-линейный морфизм резольвент $L_A \to L_B$, единственный с точностью до гомотопии; получить отсюда градуированные k-гомоморфизмы степени 0

$$\alpha\colon \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^B(P, M), \quad \beta\colon \mathrm{Ext}_B(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, N).$$

б) Рассмотрим канонические гомоморфизмы (с. 110)

$$\lambda\colon \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^B(P \otimes_A B, M), \quad \mu\colon \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^B(P, B \otimes_A M),$$

$$\nu\colon \mathrm{Ext}_B(B \otimes_A M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, N), \quad \rho\colon \mathrm{Ext}_B(M, \mathrm{Hom}_A(B, N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N).$$

Пусть m: $B \otimes_A M \to M$, p: $P \otimes_A B \to P$ и n: $N \to \mathrm{Hom}_A(B, N)$ – B-гомоморфизмы, определяемые по формулам: $m(b \otimes x) = bx$, $p(y \otimes b) = yb$ и $n(z)(b) = bz$ для $b \in B$, $x \in M$, $y \in P$, $z \in N$. Доказать равенства:

$$\alpha = \mathrm{Tor}(1_P, m) \circ \mu = \mathrm{Tor}(p, 1_M) \circ \lambda,$$

$$\beta = \nu \circ \mathrm{Ext}(m, 1_N) = \rho \circ \mathrm{Ext}(1_M, n).$$

2. Пусть A, B – две k-алгебры (ассоциативные и унитарные); пусть M – левый A-модуль, P – правый B-модуль, N – (A, B)-бимодуль. Рассмотрим гомоморфизм

$$\sigma\colon \mathrm{Hom}_B(N, P) \otimes_A M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, N), P),$$

при котором $\sigma(u \otimes m)(v) = u \circ v(m)$ для $u \in \mathrm{Hom}_B(N, P)$, $v \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $m \in M$ (II, p. 190, exercice 6).

а) Заменяя M проективной резольвентой, определить с помощью σ k-гомоморфизм

$$\tau\colon \mathrm{Tor}^A(\mathrm{Hom}_B(N, P), M) \to \mathrm{Homgr}_B(\mathrm{Ext}_A(M, N), P).$$

б) Предполагаем в дальнейшем, что кольцо A нётерово слева и что A-модуль M конечного типа. Показать, что если B-модуль P инъективен, то τ – изоморфизм.

в) Показать, что существуют две спектральные последовательности E и $'E$ (с. 49–51, упражнения 14–17), сходящиеся к одному и тому же градуированному k-модулю, для которых

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{-p}^A(\mathrm{Ext}_B^q(N, P), M), \quad {}'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(\mathrm{Ext}_A^{-q}(M, N), P).$$

3. Пусть I – инъективный k-модуль; для всякого A-модуля M обозначим через D(M) правый A-модуль $\mathrm{Hom}_k(M, I)$. Пусть M и N – два левых A-модуля, P – правый A-модуль. Доказать, что для всякого $p \geqslant 0$ k-модули $\mathrm{Ext}_A^p(P, D(M))$ и $D(\mathrm{Tor}_p^A(P, M))$ изоморфны; если кольцо A нётерово слева и M – A-модуль конечного типа, то k-модули $\mathrm{Tor}_p^A(D(N), M)$ и $D(\mathrm{Ext}_A^p(M, N))$ изоморфны (использовать упражнение 2, б), и упражнение 6, б), с. 102).

4. Для всякой группы G обозначим через ϵ_G: $Z^{(G)} \to Z$ гомоморфизм колец, при котором $\epsilon_G(e_g) = 1$ для любого $g \in G$; положим $I_G = \mathrm{Ker}(\epsilon_G)$.

а) Показать, что группа $H_1(G, Z)$ изоморфна I_G/I_G^2.

б) Пусть $(g_\iota)_{\iota \in I}$ – порождающее семейство для G; показать, что элементы $(e_{g_\iota} - 1)$ для $\iota \in I$ порождают идеал I_G.

в) Предположим, что семейство $(g_\iota)_{\iota \in I}$ *базисное* (I, p. 86). Показать, что $(e_{g_\iota} - 1)_{\iota \in I}$ есть базис левого $Z^{(G)}$-модуля I_G.

5. Пусть X – множество, G = F (X) – свободная группа, построенная на X, M – $Z^{(G)}$-модуль. Показать, что группы $H^q(G, M)$ и $H_q(G, M)$ равны нулю при $q \geqslant 2$ (использовать упражнение 4).

6. Пусть G – конечная группа порядка n, M – $Z^{(G)}$-модуль. Показать, что для всякого $q \geqslant 1$ Z-модули $H^q(G, M)$ и $H_q(G, M)$ аннулируются числом n (рассмотреть гомотопию h комплекса C (G, M) в себя, определяемую по формуле

$$hf(g_1, \ldots, g_q) = (-1)^q \sum_{g \in G} f(g_1, \ldots, g_q, g)$$

для $f \in C^{q+1}(G, M)$ и $g, g_1, \ldots, g_q \in G$). Если M – Z-модуль конечного типа, то группы $H^q(G, M)$ и $H_q(G, M)$ конечны для $q \geqslant 1$.

7. Пусть G – *циклическая* группа порядка n, M – $Z^{(G)}$-модуль, σ – порождающий группы G. Обозначим через N умножение в M на элемент $\sum_{g \in G} e_g$ из $Z^{(G)}$. Показать, что Z-модуль $H^0(G, M)$ (соответственно $H_0(G, M)$) изоморфен $\operatorname{Ker}(1 - \sigma_M)$ (соответственно $\operatorname{Coker}(1 - \sigma_M)$); для нечетного q группы $H^q(G, M)$ и $H_{q+1}(G, M)$ изоморфны $\operatorname{Ker} N/\operatorname{Im}(1 - \sigma_M)$, для четного $q \geqslant 2$ группы $H^q(G, M)$ и $H_{q-1}(G, M)$ изоморфны $\operatorname{Ker}(1 - \sigma_M)/\operatorname{Im} N$. (Использовать упражнение 1, с. 64).

8. Пусть F – свободная группа, R – нормальная подгруппа в F, G = F/R. Показать, что группа $H_2(G, Z)$ изоморфна $((F, F) \cap R)/(F, R)$ (использовать упражнение 3, с. 65).

9. а) Пусть G – группа, M – $Z^{(G)}$-модуль, g – такой элемент из центра группы G, что эндоморфизм $m \mapsto gm - m$ модуля M биективен. Показать, что группы $H^p(G, M)$ и $H_p(G, M)$ нулевые для $p \geqslant 1$.

б) Пусть V – векторное пространство над полем k, причем $\operatorname{Card}(k) \geqslant 3$. Доказать, что группы $H^p(GL(V), V)$ и $H_p(GL(V), V)$ нулевые при $p \geqslant 1$.

10. Пусть G и H – две группы, u: H → G – гомоморфизм, M – $Z^{(G)}$-модуль. Для всякого $q \geqslant 0$ из гомоморфизмов α и β упражнения 1 получаются гомоморфизмы

$$u_q^M : H_q(H, M) \to H_q(G, M), \quad u_M^q : H^q(G, M) \to H^q(H, M),$$

которые обозначаются просто через u_q и u^q, если нет неясности относительно модуля M.

а) Для $f \in C^q(G, M)$ обозначим через f_u элемент из $C^q(H, M)$, для которого $f_u(h_1, \ldots, h_q) = f(u(h_1), \ldots, u(h_q))$ при $h_1, \ldots, h_q \in H$. Показать, что отображение $f \mapsto f_u$ представляет собой морфизм комплексов из C(G, M) в C(H, M), который индуцирует на гомологии гомоморфизм $\bigoplus_q u^q$. Определить аналогичным образом морфизм из C.(H, M) в C.(G, M), который индуцирует $\bigoplus_q u_q$.

б) Предположим, что H = G и возьмем в качестве u внутренний автоморфизм группы G. Доказать, что гомоморфизмы u_q и u^q равны тождественному (провести индукцию по q).

11. Пусть G – группа, H – нормальная подгруппа в G, M – G-модуль. Согласно упражнению 10, группа G действует посредством сопряжения на Z-модулях $H^q(H, M)$; поскольку действие подгруппы H тривиально, то указанные модули наделены, следовательно, структурой $Z^{(G/H)}$-модулей.

а) Показать, что существует спектральная последовательность E (с. 49–50, упражнение 14), сходящаяся к $\bigoplus_n H^n(G, M)$, для которой $E_2^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, M))$ (рассмотреть спектральную последовательность из упражнения 6, г), с. 102, приняв во внимание канонический изоморфизм (12), с. 110).

б) Показать, что существует точная последовательность

$$0 \to H^1(G/H, H^0(H, M)) \to H^1(G, M) \to H^0(G/H, H^1(H, M)) \to$$

$$\to H^2(G/H, H^0(H, M)) \to H^2(G, M).$$

Описать гомоморфизмы этой последовательности, используя описание групп $H^n(G, M)$ в терминах комплекса C(G, M).

в) Определить спектральную последовательность, аналогичную спектральной последовательности из а), для групп гомологии.

12. Пусть G – группа. $Z^{(G)}$-модуль M называется *коиндуцированным* (соответственно *индуцированным*), если существует такой Z-модуль A, что M изоморфен $\operatorname{Hom}_Z(Z^{(G)}, A)$ (соответственно $Z^{(G)} \otimes_Z A$).

а) Всякий $Z^{(G)}$-модуль изоморфен подмодулю некоторого коиндуцированного модуля и фактормодулю некоторого индуцированного модуля.

б) Пусть M – $Z^{(G)}$-модуль. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) M – прямой множитель некоторого коиндуцированного модуля.

β) M инъективен относительно Z (упражнение 19, с. 27).

γ) Существует G-среднее на M (I, p. 136, exercice 8), т.е. такой $Z^{(G)}$-гомоморфизм m: $C^1(G, M) \to M$ (где структура $Z^{(G)}$-модуля на $C^1(G, M)$ определяется по формуле $(gf)(x) = g \cdot f(g^{-1}x)$ для $g \in G$, $x \in M$), что если f_x – постоянная функция со значением $x \in M$, то $m(f_x) = x$.

в) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) M – прямой множитель некоторого индуцированного модуля.

β) M проективен относительно Z (упражнение 19, с. 27).

γ) Существует такой Z-эндоморфизм ρ модуля M, что для всякого $x \in M$ семейство $(\rho(g^{-1}x))_{g \in G}$ имеет конечный носитель и выполняется равенство $x = \sum_{g \in G} g\rho(g^{-1}x)$.

г) Пусть M – инъективный (соответственно проективный) $Z^{(G)}$-модуль относительно Z. Показать, что $H^q(G, M) = 0$ (соответственно $H_q(G, M) = 0$) при $q \geqslant 1$.

д) Если группа G конечная, показать, что понятия индуцированного и коиндуцированного (соответственно проективного и инъективного относительно Z) модуля совпадают.

13. Пусть G – группа, H – подгруппа в G, M – левый $Z^{(H)}$-модуль, N – правый $Z^{(H)}$-модуль. Наделим группу $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{Z(H)}(Z^{(G)}, M)$ (соответственно $\check{N} = N \otimes_{Z(H)} Z^{(G)}$) структурой левого (соответственно правого) $Z^{(G)}$-модуля, полученной из структуры правого $Z^{(G)}$-модуля на $Z^{(G)}$

Пусть m: $\hat{M} \to M$ и n: $N \to \check{N}$ – $Z^{(H)}$-гомоморфизмы, при которых $m(u) = u(1)$ для $u \in \hat{M}$ и $n(x) = x \otimes 1$ для $x \in N$, и пусть i: $H \to G$ – каноническое вложение. Доказать, что композиции гомоморфизмов

$$\hat{i}^q\colon H^q(G, \hat{M}) \xrightarrow{t^q} H^q(H, \hat{M}) \xrightarrow{H^q(H, m)} H^q(H, M)$$

и

$$\check{i}_q\colon H_q(H, N) \xrightarrow{H_q(H, n)} H_q(H, \check{N}) \xrightarrow{i_q} H_q(G, \check{N})$$

представляют собой изоморфизмы для всех $q \geqslant 0$.

14. Пусть G – группа, H – подгруппа конечного индекса в G. Положим $n = (G : H)$.

а) Пусть Q, M – $Z^{(G)}$-модули. Показать, что существует Z-гомоморфизм

$$t\colon \mathrm{Hom}_{Z(H)}(Q, M) \to \mathrm{Hom}_{Z(G)}(Q, M),$$

при котором, для всякой системы представителей $g_1, \ldots, g_n$ классов группы G по модулю H,

$$(tu)(q) = \sum_{i=1}^{n} g_i u(g_i^{-1} g) \quad \text{для} \quad q \in Q, \quad u \in \mathrm{Hom}_{Z(H)}(Q, M).$$

Если j: $\mathrm{Hom}_{Z(G)}(Q, M) \to \mathrm{Hom}_{Z(H)}(Q, M)$ – каноническое вложение, то $t \circ j = n \cdot \mathrm{Id}$.

б) Пусть N – правый $Z^{(G)}$-модуль. В обозначениях из пункта а) показать, что существует Z-гомоморфизм θ: $N \otimes_{Z(G)} Q \to N \otimes_{Z(H)} Q$, при котором

$$\theta(n \otimes q) = \sum_{i=1}^{n} ng_i^{-1} \otimes g_i q \quad \text{для} \quad n \in N, \quad q \in Q.$$

Если p: $N \otimes_{Z(H)} Q \to N \otimes_{Z(G)} Q$ – каноническое отображение, то $p \circ \theta = n \cdot \mathrm{Id}$.

в) Пусть P – проективная резольвента $Z^{(G)}$-модуля Z, q – целое число. Применяя а) и б) к $Q = P_q$, определить гомоморфизмы t^q: $H^q(H, M) \to H^q(G, M)$ и θ_q: $H_q(G, N) \to H_q(H, N)$. Если i обозначает каноническое вложение H в G, то $t^q \circ i^q = n \cdot \mathrm{Id}$ и $i_q \circ \theta_q = n \cdot \mathrm{Id}$.

г) Рассмотрим $Z^{(G)}$-модули $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{Z(H)}(Z^{(G)}, M)$ и $\check{N} = N \otimes_{Z(H)} Z^{(G)}$ (упражнение 13). Взяв $Q = Z^{(G)}$, получим исходя из гомоморфизмов t и θ (пункты а) и б)) гомоморфизмы $t_M = \hat{M} \to M$ и θ_N: $N \to \check{N}$. Показать, что эти гомоморфизмы $Z^{(G)}$-линейны. Показать, что композиция гомоморфизмов

$$H^q(H, M) \xrightarrow{(\hat{i}^q)^{-1}} H^q(G, \hat{M}) \xrightarrow{H^q(G, t_M)} H^q(G, M)$$

(соответственно $H_q(G, N) \xrightarrow{H_q(G, \theta_N)} H_q(G, \check{N}) \xrightarrow{(\check{i}_q)^{-1}} H_q(H, N)$) равна t^q (соответственно θ_q).

д) Пусть $(g_1, \ldots, g_n)$ – система представителей классов группы G по модулю H и пусть $x \in H^0(H, M)$. Показать, что $t^0(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i x$. Определить t^1

е) Если отождествить группы $H_1(G, Z)$ и $H_1(H, Z)$ с $G/(G, G)$ и $H/(H, H)$ соответственно, то гомоморфизм t отождествляется с гомоморфизмом (*"перенесение"*, *"трансфер"*) V: $G/(G, G) \to H/(H, H)$. Если s: $H\backslash G \to G$ – некоторое сечение канонического отображения, то показать, что V получается посредством перехода к факторгруппе исходя из отображения V_s: $G \to H$, при котором

$$V_s(g) = \prod_{x \in H\backslash G} s(x)\, g\, (s(xg))^{-1} \quad \text{для} \quad g \in G.$$

15. Пусть G – группа и k – поле, которое наделим структурами $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля и $k^{(G)}$-модуля, полученными из тривиального действия группы G.

а) Показать, что группа $H^q(G, k)$ изоморфна $\mathrm{Ext}^q_{k^{(G)}}(k, k)$ для всякого $q > 0$ и, следовательно, обладает структурой векторного k-пространства; обозначим через $h^q(G, k)$ его размерность над k.

б) Предположим, что группа G обладает представлением (I, p. 86), определяемым d порождающими и r соотношениями. Доказать неравенства

$$d \geqslant h^1(G, k) \text{ и } r \geqslant h^2(G, k)$$

(использовать упражнение 3, г), с. 65).

¶ 16. Пусть G – p-группа (I, p. 72, déf. 9). Положим $d(G) = \dim_{\mathbf{F}_p} H^1(G, \mathbf{F}_p)$ и $r(G) = \dim_{\mathbf{F}_p} H^2(G, \mathbf{F}_p)$ (см. упражнение 15).

а) Показать, что $d(G)$ есть минимальное число порождающих группы G (доказать, что группа $H^1(G, \mathbf{F}_p)$ изоморфна группе, двойственной к $G/G^p D(G)$, и использовать I, p. 140, exercice 32).

б) Если $\mathrm{Card}(G) = p^n$, то показать, что $d(G) \leqslant n$ и $r(G) \leqslant n(n+1)/2$ (доказать индукцией по n, что существует представление группы G с n порождающими и $n(n+1)/2$ соотношениями). Если $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$, то показать, что и $d(G) = n$ и $r(G) = n(n+1)/2$.

в) Если группа G нетривиальна, доказать неравенство $r(G) > (d(G))^2/4$ (*"теорема Голода – Шафаревича"*: использовать упражнение 15, с. 68, и упражнение 22 из VIII, § 8).

г) Доказать, что $r(G) - d(G) = \dim_{\mathbf{F}_p}(H^3(G, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p)$.

17. Пусть G – конечная группа. Обозначим через N элемент $\sum_{g \in G} e_g \in \mathbf{Z}^{(G)}$. Для всякого $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля M умножение на N определяет посредством перехода к фактормодулю гомоморфизм $N_0 : H_0(G, M) \to H^0(G, M)$. Положим $\hat{H}^0(G, M) = \mathrm{Coker}(N_0)$, $\hat{H}^{-1}(G, M) = \mathrm{Ker}\, N_0$, $\hat{H}^q(G, M) = \hat{H}^q(G, M)$ при $q \geqslant 1$ и $\hat{H}^{-q}(G, M) = H_{q-1}(G, M)$ при $q \geqslant 2$.

а) Пусть $(\&) : 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей; определить точную последовательность

$$\ldots \to \hat{H}^{q-1}(G, M'') \xrightarrow{\partial^{q-1}(G,\&)} \hat{H}^q(G, M') \to \hat{H}^q(G, M) \to \hat{H}^q(G, M'') \xrightarrow{\partial^q(G,\&)} \hat{H}^{q+1}(G, M') \to \ldots$$

б) Если модуль M проективен относительно Z, то показать, что $\hat{H}^q(G, M) = 0$ при всех $q \in \mathbf{Z}$ (см. упражнение 12).

в) Пусть H – подгруппа группы G, $i : H \to G$ – каноническое вложение. Для всякого $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля M и всякого рационального целого числа q определим гомоморфизмы $\hat{i}^q_M : \hat{H}^q(G, M) \to \hat{H}^q(H, M)$ и $\hat{t}^q_M : \hat{H}^q(H, M) \to \hat{H}^q(G, M)$ (обозначаемые просто через $\hat{i}^q$ и $\hat{t}^q$, если нет неясности относительно M) следующим образом: для $q \geqslant 1$ положим $\hat{i}^q = i^q$ и $\hat{t}^q = t^q$ (упражнения 10 и 14); для $q \leqslant -2$ положим $\hat{i}^q = \theta_{-q-1}$ и $\hat{t}^q = i_{-q-1}$; наконец, определим $\hat{i}^0$ и $\hat{i}^0$ (соответственно $\hat{i}^{-1}$ и $\hat{t}^{-1}$) посредством перехода к фактормодулям (соответственно подмодулям) исходя из i^0 и t^0 (соответственно t_0 и i_0). Доказать, что $\hat{t}^q \circ \hat{i}^q = n \cdot \mathrm{Id}$ для всякого $q \in \mathbf{Z}$, где n – индекс H в G. Вывести отсюда, что группы $\hat{H}^q(G, M)$ аннулируются порядком группы G (ср. упражнение 6, с. 114).

г) В обозначениях из пункта в) показать, что

$$\hat{i}^{q+1}_{M'} \circ \partial^q(G, \&) = \partial^q(H, \&) \circ \hat{i}^q_{M''}$$

и

$$\hat{t}^{q+1}_{M'} \circ \partial^q(H, \&) = \partial^q(G, \&) \circ \hat{t}^q_{M''}$$

для всякого $q \in \mathbf{Z}$.

д) Пусть p – простое число и H – силовская p-подгруппа (I, p. 74) группы G. Показать, что ядром гомоморфизма $\hat{i}^q : \hat{H}^q(G, M) \to \hat{H}^q(H, M)$ служит сумма l-примарных компонент $\mathbf{Z}$-модуля $H^q(G, M)$ для $l \neq p$. В частности, если для всякого простого числа p выбрана некоторая силовская p-подгруппа H_p в G, то отображение $\hat{H}^q(G, M) \to \prod_p \hat{H}^q(H_p, M)$, получаемое из гомоморфизмов $\hat{i}^q$, инъективно.

18. Пусть G – конечная группа и M – $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль. M называется *когомологически тривиальным*, если для всякой подгруппы H в G и для всякого $q \in \mathbf{Z}$ группа $\hat{H}^q(H, M)$ нулевая.

а) Показать, что $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль, проективный относительно Z (в частности, индуцированный модуль, см. упражнение 12), когомологически тривиален.

б) Пусть n, r, k – три целых числа, причем $k^n - 1$ делится на r; пусть G – циклическая группа порядка n, σ – порождающий группы G. Наделим $\mathbf{Z}$-модуль $M = \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ структурой $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля, определяемой условием, что $\sigma m = km$ для всякого $m \in M$. Доказать, что $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M проективен относительно Z, если и только если числа n и r взаимно просты.

в) В обозначениях из пункта б) показать, что для того чтобы $\hat{H}^q(G, M) = 0$ при всяком $q \in \mathbf{Z}$, необходимо и достаточно, чтобы $(r, k-1)(r, 1+k+\ldots+k^{n-1}) = r$. В частности, если $r = k^n - 1$, то показать, что модуль M когомологически тривиален.

г) Получить из пунктов б) и в) пример когомологически тривиального $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля, не являющегося проективным относительно Z, и $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля M, для которого $\hat{H}^q(G, M) = 0$ при всяком $q \in \mathbf{Z}$, но не являющегося когомологически тривиальным.

¶ 19. Пусть p – простое число, G – p-группа, M – $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль. Положим $A = F^{(G)}$.

а) Предположим, что $pM = 0$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Существует рациональное целое число q, для которого $\hat{H}^q(G, M) = 0$.

β) Модуль M когомологически тривиален (упражнение 18).

γ) M – индуцированный $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль.

δ) A-модуль M свободен.

(Чтобы доказать, что из α) следует δ), свести утверждение к случаю $q = -2$; показать, что тогда

$$\mathrm{Tor}_1^A(F_p, M) = 0,$$

и закончить доказательство с помощью упражнения 4, с. 86, и упражнения 22 из ⅤIII, § 8).

б) Предположим, что в M умножение на p инъективно. Показать, что следующие условия эквивалентны.

α) Существует целое число, для которого группы $\hat{H}^q(G, M)$ и $\hat{H}^{q+1}(G, M)$ нулевые.

β) Модуль M когомологически тривиален.

γ) A-модуль M/pM свободен.

¶ 20. Пусть G – конечная группа, M – $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль.

а) Предположим, что Z-модуль M свободен. Показать, что $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M проективен, если и только если для всякой силовской подгруппы $H \subset G$ $\mathbf{Z}^{(H)}$-модуль M когомологически тривиален.

(Для доказательства достаточности условия рассмотреть резольвенту $0 \to R \to L \to M \to 0$ $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля M, в которой L – свободный $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль; показать, что $\mathbf{Z}^{(H)}$-модуль $Q = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, R)$ когомологически тривиален, заметив, что модуль Q/pQ когомологически тривиален, и используя упражнение 19. Вывести из упражнения 17, д), что $H^1(G, Q) = 0$ и отсюда сделать вывод, что модуль M проективен.)

б) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M когомологически тривиален.

β) $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M обладает конечной проективной резольвентой.

γ) $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M обладает проективной резольвентой длины 1.

(Чтобы доказать, что из α) следует γ), рассмотреть точную последовательность $0 \to R \to L \to M \to 0$, в которой L – свободный $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль, и применить утверждение а) к R.

в) Предположим, что Z-модуль M делимый. Показать, что $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M когомологически тривиален, если и только если он инъективен (рассмотреть точную последовательность $0 \to M \to I \to Q \to 0$, в которой I – инъективный $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль, и показать, используя утверждение б), что $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(Q, M)$ когомологически тривиален).

г) Для того чтобы $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль был когомологически тривиален, необходимо и достаточно, чтобы он обладал инъективной резольвентой длины 1.

¶ 21. Пусть G – циклическая группа конечного порядка.

а) Если M – $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль и q – четное (соответственно нечетное) рациональное целое число, то группа $\hat{H}^q(G, M)$ изоморфна $\hat{H}^0(G, M)$ (соответственно $\hat{H}^1(G, M)$) (ср. упражнение 7).

б) Обозначим через $\mathscr{C}$ множество классов $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей T, для которых группы $\hat{H}^q(G, T)$ *конечны* при всех $q \in \mathbf{Z}$; если $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль M имеет тип $\mathscr{C}$, то положим

$$h(M) = \mathrm{Card}(H^0(G, M))/\mathrm{Card}(H^1(G, M)).$$

Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей. Показать, что если два из модулей M′, M, M″ имеют тип $\mathscr{C}$, то тем же свойством обладает третий модуль, и тогда $h(M) = h(M')h(M'')$. В частности функция h определяет гомоморфизм группы Гротендика $K(\mathscr{C})$ в мультипликативную группу $\mathbf{Q}^*$.

в) Пусть M – конечный $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль. Показать, что тогда M имеет тип $\mathscr{C}$ и $h(M) = 1$.

г) Предположим, что порядок группы G – простое число p. Обозначим через $\mathscr{C}'$ множество классов $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей, в которых умножение на p имеет конечное ядро и коядро; если M – модуль типа $\mathscr{C}'$, то положим $\varphi(M) = \mathrm{Card}(\mathrm{Coker}\, p_M)/\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\, p_M)$. Доказать, как и в пункте б), что φ определяет гомоморфизм группы $K(\mathscr{C}')$ в $\mathbf{Q}^*$.

д) Показать, что группа $K(\mathscr{C}')$ порождается классами $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей T, обладающих одним из следующих свойств:

(i) Модуль $T = \mathbf{Z}$ и наделен тривиальным действием группы G.

(ii) Модуль T конечный.

(iii) Умножение на p в T биективно.

(iv) $\Upsilon = \mathbf{Z}^{(G)}$.

(v) Модуль $\Upsilon = \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_{\dot{p}}$ (см. TG, III, p. 84, exercice 23; Общая топология, III, с. 115, упражнение 23) и наделен тривиальным действием группы G.

(vi) $\Upsilon = \mathbf{Z}^{(G)} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$.

(Показать сначала, что всякий $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль типа $\mathscr{C}'$ представляется в $\acute{K}(\mathscr{C}')$ как сумма $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля конечного типа над $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуля, в котором умножение на p сюръективно. Определить затем структуру простых модулей над кольцами $\mathbf{Q}^{(G)}$ и $\mathbf{Q}_p^{(G)}$).

е) Вывести из предыдущего, что $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ и что, если M – $\mathbf{Z}^{(G)}$-модуль типа $\mathscr{C}'$, то

$$h(M)^{p-1} = (\varphi(M^0(G, M)))^p/\varphi(M).$$

(Проверить формулу в шести случаях, рассматриваемых в пункте д).)

22. Пусть K – поле, L – конечное расширение Галуа поля K, G – его группа Галуа.

а) Показать, что точная последовательность $\mathbf{Z}^{(G)}$-модулей

$$0 \to \mu_n(L) \to L^* \xrightarrow{x \mapsto x^n} L^{*n} \to 0$$

позволяет определить изоморфизм k_L: $(L^n \cap K^*)/K^{*n} \to H^1(G, \mu_n(L))$. Когда $\mu_n(K)$ содержит n элементов и группа $H^1(G, \mu_n(L))$ отождествляется с $\mathrm{Hom}(G, \mu_n(K))$, показать, что k_L совпадает с гомоморфизмом, определенным в V, § 11, n°8.

б) Пусть p – простое число; предположим, что K имеет характеристику p. Показать, что точная последовательность модулей (V, § 11, n°9)

$$0 \to \mathbf{F}_p \to L \xrightarrow{\wp} \wp(L) \to 0$$

позволяет определить изоморфизм a_L: $(\wp(L) \cap K)/\wp(K) \to H^1(G, \mathbf{F}_p)$, который совпадает с гомоморфизмом, определенным в V, § 11, n°9, если группа $H^1(G, \mathbf{F}_p)$ отождествлена с $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{F}_p)$.

23. Пусть G – группа, M – группа с операторами из G (I, p. 29, déf. 2; Алгебра, I, с. 100, определение 10). Мы будем обозначать через ${}^g m$ композицию элементов $g \in G$ и $m \in M$. Мы будем называть M *G-группой*, если ${}^h({}^g m) = {}^{hg} m$ для $m \in M$, $g, h \in G$, иначе говоря, если отображение φ группы G в Aut (M), при котором $\varphi(g) \cdot m = {}^g m$ для $g \in G$, $m \in M$, представляет собой *гомоморфизм*.

Если M – G-группа, то обозначим через $H^0(G, M)$ подгруппу в M, образованную элементами $m \in M$, для которых ${}^g m = m$ при всех $g \in G$, и через $Z^1(G, M)$ – множество отображений h группы G в M, для которых

$$h(gg') = h(g)\,{}^g h(g') \quad \text{при} \quad g, g' \in G.$$

а) Два элемента $h_1, h_2 \in Z^1(G, M)$ называются *когомологичными*, если существует элемент $m \in M$, для которого $h_2(g) = m^{-1} h_1(g)\,{}^g m$ при всяком $g \in G$. Показать, что отношение, таким образом определенное, представляет собой отношение эквивалентности на $Z^1(G, M)$; соответствующее факторможество обозначается через $H^1(G, M)$. Класс в $H^1(G, M)$ отображения $i \in Z^1(G, M)$, при котором $i(g) = e_M$ для всякого $g \in G$, обозначается через $e_{G,M}$ или просто e_M.

б) Пусть f: $M \to N$ – гомоморфизм G-групп (I, p. 30, déf. 3); показать, что f индуцирует гомоморфизм групп f^0: $H^0(G, M) \to H^0(G, N)$ и отображение f^1: $H^1(G, M) \to H^1(G, N)$, при котором $f^1(e_M) = e_N$.

в) Пусть $M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} Q$ – последовательность G-групп и гомоморфизмов, в которой гомоморфизм i инъективен, p сюръективен и

$$\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(p).$$

Показать, что группа $N' = p^{-1}(H^0(G, Q))$ действует на $Z^1(G, M)$ таким образом, что $(n \cdot h)(g) = n^{-1} h(g)\,{}^g n$ для $n \in N'$, $h \in Z^1(G, M)$, $g \in G$; показать, что это действие определяет посредством перехода к факторможеству действие группы $H^0(G, Q)$ на $H^1(G, M)$. Отображение i^1: $H^1(G, M) \to H^1(G, N)$ переносится на факторможество и определяет биекцию $H^1(G, M)/H^0(G, Q)$ на $\mathrm{Im}(i^1)$.

г) Действие группы $H^0(G, Q)$ на $H^1(G, M)$ позволяет определить отображение ∂: $H^0(G, Q) \to H^1(G, M)$ по формуле: $\partial(q) = q \cdot e_M$ для $q \in H^0(G, Q)$. Показать, что

$$\mathrm{Im}(i^0) = \mathrm{Ker}(p^0), \qquad \mathrm{Im}(p^0) = \partial^{-1}(e_M),$$

$$\mathrm{Im}(\partial) = (i^1)^{-1}(e_N), \qquad \mathrm{Im}(i^1) = (p^1)^{-1}(e_Q).$$

д) Мы предпопагаем в дальнейшем, что $i(M)$ содержится в центре группы N. Показать, что ∂ – гомоморфизм групп; построить действие группы $H^1(G, M)$ на множестве $H^1(G, N)$ таким образом, чтобы отображение p^1 переносилось на фактормножество и определяло биекцию $H^1(G, N)/H^1(G, M)$ на $\mathrm{Im}(p^1)$.

е) Пусть E – множество отображений k группы G в N, для которых $p \circ k \in Z^1(G, Q)$. Для $k \in E$ показать, что существует такой элемент $f_k \in Z^2(G, M)$, что $i(f_k(x, y)) = k(x)\,{}^x k(y)(k(x, y))^{-1}$ для $x, y \in G$. Показать, что отображение $k \mapsto f_k$ определяет посредством перехода к факторможествам отображение ∂^1: $H^1(G, Q) \to H^2(G, M)$. Доказать, что $\mathrm{Im}(p^1) = (\partial^1)^{-1}(0)$.

24. Пусть K – поле, L – конечное расширение Галуа поля K с группой Галуа G.

Пусть V (соответственно V′) – векторное K-пространство, t (соответственно t') – тензор типа (p, q) на V (соответственно V′) (III, p. 63). K-изоморфизмом (или просто изоморфизмом) (V, t) на (V', t') называется K-линейный изоморфизм u: $V \to V'$, для которого $(T^p(u) \otimes T^q(\check{u}))(t) = t'$. Мы будем обозначать через V_L векторное L-пространство $L \otimes_K V$ и через t_L – тензор типа (p, q) на V_L, получаемый из t расширением скаляров. Через $F_{L/K}(V, t)$ обозначается множество классов относительно изоморфизма пар (W, τ), для которых пара (W_L, τ_L) L-изоморфна (V_L, t_L).

а) Пусть M – группа L-автоморфизмов пары (V_L, t_L). Для $m \in M$ и $\sigma \in G$ положим:

$$^{\sigma}m = \pi_V(\sigma) \circ m \circ \pi_V(\sigma)^{-1},$$

где π_V: $G \to \mathrm{Aut}_K(V_L)$ обозначает действие G на $V_L = L \otimes_K V$, получаемое из действия G на L. Показать, что таким способом на M определяется структура G-группы.

б) Пусть (W, τ) – элемент из $F_{L/K}(V, t)$, и пусть u – L-изоморфизм (V_L, t_L) на (W_L, τ_L). Для $\sigma \in G$ обозначим через $f_u(\sigma)$ элемент $u^{-1} \circ \pi_W(\sigma) \circ u \circ \pi_V(\sigma)^{-1}$ группы M. Показать, что $f_u \in Z^1(G, M)$ (упражнение 23) и что его класс в $H^1(G, M)$ не зависит от выбора u; он обозначается через $\theta(W, \tau)$.

в) Показать, что отображение θ: $F_{L/K}(V, t) \to H^1(G, M)$ *биективно* и что $\theta(V, t) = e_M$.

¶ 25. Пусть K – поле, L – конечное расширение Галуа поля K, G – его группа Галуа. Определим действие группы G на группе $\mathbf{GL}(n, L)$, положив $\sigma(a_{ij}) = (\sigma(a_{ij}))$ для $\sigma \in G$, $(a_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, L)$.

Всякая подгруппа в $\mathbf{GL}(n, L)$, устойчивая относительного этого действия, наделяется тем самым структурой G-группы (упражнение 23).

а) Показать, что множества $H^1(G, \mathbf{GL}(n, L))$ и $H^1(G, \mathbf{SL}(n, L))$ состоят из одного элемента (ср. V, § 10, n°5, prop. 9).

б) Показать, что множество $H^1(G, \mathbf{PGL}(n, L))$ отождествляется с множеством классов относительно изоморфизма центральных простых алгебр S, для которых алгебра $L \otimes_K S$ изоморфна $\mathbf{M}_n(L)$ (использовать упражнение 24). Сопоставляя такой алгебре ее класс в группе $\mathrm{Br}(K, L)$ и отождествляя эту последнюю группу с $H^2(G, L^*)$ (VIII, § 13), получаем отображение $H^1(G, \mathbf{PGL}(n, L)) \to H^2(G, L^*)$, которое противоположно отображению ∂^1 (упражнение 23, а), получаемому из расширения $L^* \to \mathbf{GL}(n, L) \to \mathbf{PGL}(n, L)$.

в) Показать, что множество $H^1(G, \mathbf{Sp}(2n, L))$ состоит из одного элемента (ср. IX, § 5, n°1, th. 1).

г) Пусть Q – квадратичная форма на векторном K-пространстве V, Q_L – квадратичная форма, которая из нее получается на $L \otimes_K V$. Показать, что $H^1(G, O(Q_L))$ отождествляется с множеством классов относительно изоморфизма квадратичных форм Q′ на V, для которых форма Q'_L изоморфна Q_L.

26. Обозначим через A^e k-алгебру $A \otimes_k A^0$; всякий (A, A)-бимодуль естественным образом наделяется структурой левого A^e-модуля, а также структурой правого A^e-модуля. Пусть M – (A, A)-бимодуль, n – целое число $\geqslant 0$; положим

$$H_n(A, M) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A), \qquad H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M).$$

а) k-модуль $H_0(A, M)$ изоморфен фактормодулю k-модуля M по k-подмодулю, порожденному элементами $am - ma$ для $a \in A$, $m \in M$; k-модуль $H^0(A, M)$ изоморфен k-подмодулю в M, образованному элементами m, для которых $am = ma$ при всех $a \in A$. k-модуль $H^1(A, M)$ отождествляется с фактормодулем k-модуля дифференцирований $D_k(A, M)$ по k-подмодулю внутренних дифференцирований, т.е. дифференцирований d_m, определяемых для $m \in M$ по формуле $d_m(a) = am - ma$ для всякого $a \in A$ (ср. III, p. 132).

б) Предположим, что A – *проективный* k-модуль. Показать, что стандартная резольвента B(A) (с. 62) определяет проективную резольвенту левого A^e-модуля A. Вывести отсюда, что k-модули $H^n(A, M)$ изоморфны модулям гомологии комплекса C(A, M), где при $p \geqslant 0$ $C^p(A, M)$ представляет собой k-модуль k-полилинейных отображений A^p в M, $C^p(A, M) = 0$ при $p < 0$, а дифференциал задается по формуле

$$(df)(x_0, \ldots, x_p) = x_0 \cdot f(x_1, \ldots, x_p) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} f(x_0, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_p) +$$

$$+ (-1)^{p+1} f(x_0, \ldots, x_{p-1}) \cdot x_p,$$

для $f \in C^p(A, M)$, $x_0, \ldots, x_p \in A$.

Дать аналогичное выражение для k-модулей $H_n(A, M)$.

в) В предположениях пункта б) пусть ρ: $k \to k'$ – гомоморфизм коммутативных колец, A′ – k'-алгебра $k' \otimes_k A$, M – (A′, A′)-бимодуль. Показать, что k-модули $H_n(A, M')$ и $H_n(A', M')$ (соответственно $H^n(A, M')$ и $H^n(A', M')$) изоморфны.

г) Предполагаем в дальнейшем, что k – поле. Пусть B – другая k-алгебра (ассоциативная и унитарная), M – (A, A)-бимодуль, N – (B, B)-бимодуль. Для всякого $n \geqslant 0$ определить изоморфизм

k-модулей

$$H_n(A \otimes_k B,\ M \otimes_k N) \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A, M) \otimes_k H_q(B, N)).$$

Если предположить дополнительно, что алгебры A и B конечной размерности над k, то показать, что существует также k-изоморфизм

$$H^n(A \otimes_k B,\ M \otimes_k N) \to \bigoplus_{p+q=n} (H^p(A, M) \otimes_k (H^q(B, N))$$

для всякого $n \geqslant 0$ (использовать теорему 3, с. 82).

д) Пусть M, N – два левых A-модуля, P – правый A-модуль, так что k-модули $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ и $M \otimes_k P$ имеют естественные структуры (A, A)-бимоделей. Определить для всякого $n \geqslant 0$ изоморфизмы k-модулей

$$H^n(A, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \text{ и } H_n(A, M \otimes_k P) \to \mathrm{Tor}^A_n(P, M).$$

¶ 27. *Пополнением* k-алгебры A называется унитарный гомоморфизм k-алгебр π: $A \to k$; пара (A, π) называется *пополненной k-алгеброй*. Пополнение наделяет k структурой левого A-модуля. Пусть M – левый A-модуль, N – правый A-модуль; положим

$$H_n(A; \pi; N) = \mathrm{Tor}^A_n(N, k) \text{ и } H^n(A, \pi; M) = \mathrm{Ext}^n_A(k, M)$$

для всякого $n \geqslant 0$.

а) Обозначим через $M_{(\pi)}$ (соответственно $N_{(\pi)}$) группу M (соответственно N), наделенную структурой (A, A)-бимодуля, определяемой по формуле:

$ama' = \pi(a')am$ (соответственно $ana' = n\pi(a)a'$)

для $a, a' \in A$, $m \in M$, $n \in N$.

Показать, что k-модуль $H_0(A, \pi; N)$ (соответственно $H^0(A, \pi; M)$, соответственно $H^1(A, \pi; M)$) изоморфен k-модулю $H_0(A, N_{(\pi)})$ (соответственно $H^0(A, M_{(\pi)})$, соответственно $H^1(A, M_{(\pi)})$), определенному в упражнении 26.

б) Далее мы предполагаем, что A – *проективный* k-модуль. Определить с помощью стандартной резольвенты (с. 62) k-изоморфизмы φ_n: $H_n(A, N_{(\pi)}) \to H_n(A, \pi; N)$ и φ^n: $H^n(A, M_{(\pi)}) \to H^n(A, \pi; M)$ для всех $n \geqslant 0$.

в) Предположим, что существует гомоморфизм k-алгебр ρ: $A \to A^e$, который превращает A^e в проективный правый A-модуль и для которого левый идеал в A^e, порожденный множеством $\rho(\mathrm{Ker}(\pi))$, совпадает с ядром гомоморфизма $A \otimes_k A^\circ \to A$, определяемого умножением в A. Показать, что для всякого (A, A)-бимодуля Q и всякого целого $n \geqslant 0$ существуют k-изоморфизмы $H_n(A, \pi; Q) \to H_n(A, Q)$ (соответственно $H^n(A, \pi; Q) \to H^n(A, Q)$), где Q рассматривается как правый (соответственно левый) A-модуль при помощи гомоморфизма ρ. (Использовать канонические гомоморфизмы (11), (12), с. 110).

г) Показать, что предположения в пункте в) выполняются в следующих случаях:

α) A – групповая алгебра (над k) некоторой группы G, ρ определяется условием: $\rho(e_g) = e_g \otimes e_{g^{-1}}$.

β) A – тензорная (соответственно симметрическая) алгебра проективного k-модуля V; ρ определяется условием:

$\rho(v) = v \otimes 1 - 1 \otimes v$.

*γ) A – обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над k, которая свободна как k-модуль; имеем:

$\rho(x) = x \otimes 1 - 1 \otimes x$ для $x \in \mathfrak{g}$

(использовать LIE, I, § 2, n°7, cor. 5 au th. 1; Группы и алгебры Ли, I, с. 32, следствие 5 теоремы 1)

δ) A – кольцо функций гладкой алгебраической группы G над полем k; полагаем

$$\rho(f) = \sum_{i=1}^{k} f'_i \otimes f''_i, \text{ где } f(gh^{-1}) = \sum_{i=1}^{k} f'_i(g) f''_i(h) \text{ для } g, h \in G. \blacksquare$$

*28. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над коммутативным кольцом k, U – ее обертывающая алгебра. Наделим k структурой левого U-модуля, соответствующей тривиальному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть N – правый $\mathfrak{g}$-модуль, M – левый $\mathfrak{g}$-модуль, n – целое число $\geqslant 0$; положим:

$$H_n(\mathfrak{g}, N) = \mathrm{Tor}^U_n(N, k) \text{ и } H^n(\mathfrak{g}, N) = \mathrm{Ext}^n_U(k, M).$$

а) k-модуль $H_0(\mathfrak{g}, N)$ (соответственно $H^0(\mathfrak{g}, M)$) изоморфен $N/N\mathfrak{g}$ (соответственно подмодулю в M, образованному элементами, аннулируемыми алгеброй Ли $\mathfrak{g}$). Обозначим через $Z^1(\mathfrak{g}, M)$ (соответственно $B^1(\mathfrak{g}, M)$) k-подмодуль в $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, M)$, образованный элементами f, для которых $f([x, y]) = xf(y) - yf(x)$ при $x, y \in \mathfrak{g}$ (соответственно такими элементами f_m для $m \in M$, что $f_m(x) = xm$ при $x \in \mathfrak{g}$). Показать, что $H^1(\mathfrak{g}, M)$ отождествляется с фактормодулем $Z^1(\mathfrak{g}, M)/B^1(\mathfrak{g}, M)$.

б) Предполагаем в дальнейшем, что $\mathfrak{g}$ – свободный k-модуль. Показать, что k-модули $H^n(\mathfrak{g}, M)$ отождествляются с модулями гомологий комплекса $C(\mathfrak{g}, M)$, где для $p \geqslant 0$ $C^p(\mathfrak{g}, M)$ представляет собой k-модуль кососимметрических полилинейных отображений $\mathfrak{g}^p$ в M, $C^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ для $p < 0$, а дифференциал задается по формуле

$$df(x_1, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1})$$

для $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$, $x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathfrak{g}$ (где знак ^ над буквой означает, что она должна быть опущена).

Дать аналогичное выражение для k-модулей $H_p(\mathfrak{g}, M)$. (Использовать упражнение 21, с. 70.)

в) Предположим, что $\dim_k(\mathfrak{g}) = n < \infty$. Показать, что $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ для всякого $p \geqslant n+1$ и всякого $\mathfrak{g}$-модуля M и что существует $\mathfrak{g}$-модуль N, для которого $H^n(\mathfrak{g}, N) \neq 0$ (взять $N = \Lambda^n \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ действует по формуле

$$x \cdot (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge [x, x_i] \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_n ;$$

показать, что $df = 0$ для всякого $f \in C^{n-1}(\mathfrak{g}, N)$).

г) Присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и представление $\mathfrak{g}$ на M определяют представление θ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $C(\mathfrak{g}, M)$, при котором

$$(\theta(x)f)(x_1, \ldots, x_p) = x \cdot f(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{i=1}^{p} f(x_1, \ldots, [x, x_i], \ldots, x_p)$$

для $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$, $x, x_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{g}$. Показать, что $\theta(x)$ для всякого $x \in \mathfrak{g}$ представляет собой гомотопный нулю эндоморфизм комплекса $C(\mathfrak{g}, M)$ (определить гомотопию $i(x)$, положив $(i(x)f)(x_1, \ldots, x_p) = f(x, x_1, \ldots, x_p)$). ∎

¶ *29. Сохраняем обозначения из предыдущего упражнения; предположим, кроме того, что k – поле характеристики нуль и что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *полупроста* (LIE, I, § 6; Группы и алгебры Ли, I, с. 64). Пусть M – $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности над k.

а) Если $\mathfrak{g}$-модуль M прост и нетривиален, то $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ для всех $p > 0$ (билинейная форма на $\mathfrak{g}$, ассоциированная с M, невырождена (LIE, I, § 6, n° 1, prop. 1; Группы и алгебры Ли, I, с. 65, предложение 1); заметить, что умножение на соответствующий элемент Казимира (LIE, I, § 3, n° 7; Группы и алгебры Ли, I, с. 47) нулевое в k и биективно в M).

б) Показать, что $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ для всякого M (использовать пункт а) и тот факт, что $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$). Обратно, k-алгебра Ли $\mathfrak{h}$ (конечной размерности), над которой для всякого модуля M конечной размерности $H^1(\mathfrak{h}, M) = 0$, полупроста.

в) Наделим k структурой $\mathfrak{g}$-модуля, соответствующей тривиальному представлению. Показать, что для всякого $p \geqslant 0$ векторное k-пространство $H^p(\mathfrak{g}, k)$ изоморфно векторному подпространству в $C^p(\mathfrak{g}, k)$ образованному теми кососимметрическими p-линейными формами f, которые *инвариантны*, т.е. таковы, что

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_1, \ldots, [x, x_i], \ldots, x_p) = 0 \text{ для всех } x, x_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{g}.$$

(Вывести из полупростоты представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и из упражнения 28, г), что пространство $H^p(\mathfrak{g}, k)$ изоморфно $H^p(C_0(\mathfrak{g}, k))$, где $C_0(\mathfrak{g}, k)$ – подкомплекс в $C(\mathfrak{g}, k)$ аннулируемый всеми эндоморфизмами $\theta(x)$ для $x \in \mathfrak{g}$; затем показать, что $C_0(\mathfrak{g}, k)$ имеет нулевой дифференциал).

г) Вывести из пункта в), что $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ для всякого $\mathfrak{g}$-модуля M конечной размерности над k. (Показать, что всякая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ – симметрическая, сведя рассмотрение к случаю, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ простая и поле k алгебраически замкнуто.) ∎

§ 7. КОМПОЗИЦИОННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Сохраняются общие соглашения из § 4.

1. Гомоморфизм $\mathrm{Ext}_A(N, P) \otimes \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, P)$

Пусть M и N – два левых A-модуля. Рассмотрим гомологизмы p_M: $L(M) \to M$, e_M: $M \to I(M)$ и $e_M \circ p_M$: $L(M) \to I(M)$; согласно предложению 4, с. 92, отсюда получаем *биективный* гомоморфизм

$$a_{M,N}: H(\mathrm{Homgr}_A(e_M \circ p_M, 1)): H(\mathrm{Homgr}_A(I(M), I(N)) \to \mathrm{Ext}_A(M, N).$$

Напомним, кроме того (с. 88), что $H^n(\mathrm{Homgr}(I(M), I(N))$ представляет собой множество гомотопических классов морфизмов верхней степени n комплекса $I(M)$ в комплекс $I(N)$. Например, если $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, то гомотопический класс морфизма $I(f)$ переводится отображением $a_{M,N}$ в f.

Если P — третий левый A-модуль, то согласно изложенному на с. 100, имеем канонический k-гомоморфизм

$$H(\mathrm{Homgr}_A(I(N), I(P)) \otimes_k H(\mathrm{Homgr}_A(I(M), I(N)) \to H(\mathrm{Homgr}_A(I(M), I(P)),$$

из которого получаем с помощью изоморфизмов $a_{N,P}$, $a_{M,N}$ $a_{M,P}$ k-гомоморфизм (*гомоморфизм композиции*)

$$c_{M,N,P}: \mathrm{Ext}_A(A, P) \otimes_k \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, P).$$

Он соответствует *k-билинейному отображению*

$$\mathrm{Ext}_A(N, P) \times \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, P), \tag{1}$$

которое разлагается на однородные компоненты

$$\mathrm{Ext}_A^i(N, P) \times \mathrm{Ext}_A^j(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^{i+j}(M, P). \tag{2}$$

Если $u \in \mathrm{Ext}_A(N, P)$, $v \in \mathrm{Ext}_A(M, N)$, то образ пары (u, v) при отображении (1) называется *композиционным произведением элементов* u и v и обозначается через $u \circ v$. Если g (соответственно f) — морфизм комплексов верхней степени j (соответственно i) из $I(M)$ в $I(N)$ (соответственно из $I(N)$ в $I(P)$) и $\bar{g}$ (соответственно $\bar{f}$) — его гомотопический класс, то композиционное произведение $a_{N,P}(\bar{f}) \circ a_{M,N}(\bar{g})$ представляет собой образ при изоморфизме $a_{M,P}$ гомотопического класса морфизма $f \circ g$ из $I(M)$ в $I(P)$.

Пример 1. Если $u \in \mathrm{Hom}_A(N, P)$, $v \in \mathrm{Hom}(M, N)$, то $u \circ v$ есть композиция гомоморфизмов u и v.

Пример 2. Если $u \in \mathrm{Hom}_A(N, P)$, $v \in \mathrm{Ext}_A(M, N)$, то

$$u \circ v = \mathrm{Ext}_A(1_M, u)(v) \in \mathrm{Ext}_A(M, P).$$

Аналогично, если $u \in \mathrm{Ext}_A(N, P)$, $v \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, то

$$u \circ v = \mathrm{Ext}_A(v, 1_P)(u) \in \mathrm{Ext}_A(M, P).$$

Это следует из определений и замечаний на с. 94.

Если Q, M, N, P — четыре левых A-модуля и если

$$u \in \mathrm{Ext}_A(N, P), \quad v \in \mathrm{Ext}_A(M, N), \quad w \in \mathrm{Ext}_A(Q, M),$$

то $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$: композиционное произведение *ассоциативно;* поэтому мы будем обозначать композиции нескольких элементов без скобок. В частности, согласно примеру 2:

Пример 3. Пусть M, N, M′, N′ — четыре левых A-модуля. Если $u \in \mathrm{Ext}_A(M, N)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M', M)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(N, N')$, то

$$\mathrm{Ext}_A(f, g)(u) = g \circ u \circ f \in \mathrm{Ext}_A(M', N'). \tag{3}$$

Это дает новое доказательство k-билинейности отображения $(f, g) \mapsto \mathrm{Ext}_A(f, g)$ (с. 94, предложение 6).

2. Семь вычислений композиционного произведения

Пусть M, M′ и M″ — три левых A-модуля, a: $R \to M$, a' : $R' \to M'$ и a'' : $R'' \to M''$ — проективные резольвенты, c: $M \to E$, c': $M' \to E'$ и c'': $M'' \to E''$ — инъективные резольвенты. Из теоремы 1, с. 103, и предложения 2, с. 105, следует, что диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
H(\mathrm{Homgr}_A(M, E')) & \longrightarrow & H(\mathrm{Homgr}_A(R, E')) & \longleftarrow & H(\mathrm{Homgr}_A(R, M')) \\
\uparrow & \overset{\varphi(M,E')}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \varphi(R,E')} & \overset{\varphi(R,M')}{\swarrow} & \uparrow \\
H(\mathrm{Homgr}_A(E, E')) & \xrightarrow{\varphi(E,E')} & \mathrm{Ext}_A(M, M') & \xleftarrow{\varphi(R,R')} & H(\mathrm{Homgr}_A(R, R')),
\end{array}$$

в которой необозначенные гомоморфизмы канонически получаются из c, a, c', a', ком-

мутативна и что все стрелки в ней представляют собой изоморфизмы, дающие пять описаний модуля $\mathrm{Ext}_A(M, M')$. Аналогично получаем пять описаний для $\mathrm{Ext}_A(M', M'')$, и столько же для $\mathrm{Ext}_A(M, M'')$.

Рассмотрим теперь семь гомоморфизмов композиции

$$H(\mathrm{Homgr}_A(C', C'')) \otimes_k H(\mathrm{Homgr}_A(C, C')) \to H(\mathrm{Homgr}_A(C, C'')),$$

где в качестве (C, C', C'') последовательно берутся семь троек (R, R', R''), (R, R', M''), (R, R', E''), (R, M', E''), (R, E', E''), (M, E', E''), (E, E', E''):

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & R'' \\ & \searrow & & \searrow & \\ M & & M' & & M'' \\ & \searrow & & \searrow & \\ E & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E''. \end{array}$$

Отождествляя $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ с $\mathrm{Ext}(M, M')$ посредством соответствующего изоморфизма из указанных выше, и аналогично для $H(\mathrm{Homgr}_A(C', C''))$ и $H(\mathrm{Homgr}_A(C, C''))$, получаем *семь гомоморфизмов*

$$\mathrm{Ext}_A(M', M'') \otimes_k \mathrm{Ext}_A(M, M') \to \mathrm{Ext}_A(M, M'').$$

Эти *семь гомоморфизмов совпадают* и не зависят от выбора резольвент. В частности, они совпадают с гомоморфизмом, определенным в п. 2 посредством тройки $(I(M), I(M'), I(M''))$. Действительно, это следует из интерпретации модулей $H^n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ как модулей гомотопических классов морфизмов комплексов из C в C' и из того факта, что если в диграмме комплексов

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{f} & C' & \xrightarrow{g} & C'' \\ \alpha\downarrow & & \alpha'\downarrow & & \alpha''\downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{f_1} & C_1' & \xrightarrow{g_1} & C_1'' \end{array}$$

морфизм $\alpha'' \circ g$ гомотопен $g_1 \circ \alpha'$ и $\alpha' \circ f$ гомотопен $f_1 \circ \alpha$, то $\alpha'' \circ g \circ f$ гомотопен $g_1 \circ f_1 \circ \alpha$ (с. 38, предложение 4 и следствие).

В дальнейшем мы будем использовать в зависимости от обстоятельств ту или иную из семи предыдущих конструкций гомоморфизмов композиции.

3. Класс, ассоциированный с точной последовательностью

Предложение 1. *Пусть* (C, d) *и* (C', d') *– два комплекса левых* A*-модулей и* n, p, q *– три целых числа, причем* $p \geqslant q$. *Для* $p \geqslant i \geqslant q-1$ *пусть* $f_i\colon C_i \to C'_{i+n+1}$ *гомоморфизм* A*-модулей, для которого* $f_p \circ d = 0$, $f_i \circ d = d' \circ f_{i+1}$ *при* $p > i \geqslant q-1$ *и* $d' \circ f_{q-1} = 0$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} C_{p+1} & \xrightarrow{d} & C_p & \xrightarrow{d} & C_{p-1} & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & C_q & \xrightarrow{d} & C_{q-1} & \xrightarrow{d} & C_{q-2} \\ 0\downarrow & & f_p\downarrow & \searrow^{\alpha} & \downarrow f_{p-1} & & & & f_q\downarrow & \searrow^{\beta} & \downarrow f_{q-1} & & \downarrow 0 \\ C'_{p+n+2} & \xrightarrow{-d'} & C'_{p+n+1} & \xrightarrow{d'} & C'_{p+n} & \xrightarrow{d'} & \dots & \xrightarrow{d'} & C_{q+n+1} & \xrightarrow{d'} & C_{q+n} & \xrightarrow{d'} & C_{q+n-1}. \end{array}$$

Положим $\alpha = f_{p-1} \circ d = d' \circ f_p$, $\beta = f_{q-1} \circ d = d' \circ f_q$, *и пусть* a *(соответственно* b*) – градуированный* A*-гомоморфизм степени* n *из* C *в* C', *единственная ненулевая биоднородная компонента которого есть* α *(соответственно* β*). Тогда* $a \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$, $b \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$ *и* $a - (-1)^{(n+1)(p-q)} b \in B_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$.

Имеем: $d' \circ \alpha = d' \circ d' \circ f_p = 0$, $\alpha \circ d = f_{p-1} \circ d \circ d = 0$, следовательно,

$a \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$;

аналогично, $b \in Z_n(\mathrm{Homgr}_A(C, C'))$. Положим $\epsilon = (-1)^{n+1}$. В комплексе $\mathrm{Homgr}_A(C, C')$

имеют место соотношения:

$$Df_{p-1} = d' \circ f_{p-1} - \epsilon f_{p-1} \circ d = f_{p-2} \circ d - \epsilon\alpha,$$
$$Df_i = d' \circ f_i - \epsilon f_i \circ d = f_{i-1} \circ d - \epsilon f_i \circ d \qquad (p-1 > i > q),$$
$$Df_q = d' \circ f_q - \epsilon f_q \circ d = \beta - \epsilon f_q \circ d,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{p-q} \epsilon^i Df_{p-i} = \epsilon^{p-q}\beta - \alpha,$$

что доказывает предложение.

Рассмотрим два левых A-модуля M и N и *точную последовательность* A-модулей

$$0 \to N \to R_n \to R_{n-1} \to \cdots \to R_1 \to M \to 0. \tag{4}$$

Согласно предложениям 3 и 3 bis, с. 55–56, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{e_N} & I^0(N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & I^{n-1}(N) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & I^n(N) & \xrightarrow{\delta^n} & I^{n+1}(N) \\
\uparrow & & \uparrow 1_N & & \uparrow v^0 & & & & \uparrow v^{n-1} & & \uparrow v^n & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow u_n & & \uparrow u_{n-1} & & & & \uparrow u_0 & & \uparrow 1_M & & \uparrow \\
L_{n+1}(M) & \xrightarrow[d_{n+1}]{} & L_n(M) & \xrightarrow[d_n]{} & L_{n-1}(M) & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow[d_1]{} & L_0(M) & \xrightarrow[p_M]{} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{5}$$

Рассмотрим два элемента b и a из $\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))$, единственными ненулевыми биоднородными компонентами которых служат

$b^n = e_N \circ u_n \colon L_n(M) \to I^0(N)$ и $a^n = v^n \circ p_M \colon L_0(M) \to I^n(N)$

соответственно.

Предложение 2. *Имеем* $a, b \in Z^n(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N)))$. Кроме *того, классы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *элементов* a *и* b *в* $H^n(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N))) = \mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ *зависят только от точной последовательности* (4) *и равны между собой.*

Согласно предложению 1, примененному к двум крайним строкам диаграммы (5) и композициям вертикальных стрелок для $p = n, q = 0$, имеем: $a, b \in Z^n(\mathrm{Homgr}_A(L(M), I(N)))$ и

$$a - b = a - (-1)^{(-n+1)n} b \in B^n(\mathrm{Homgr}_A(L(M), (I(N)))).$$

Так как a (соответственно b) не зависит от выбора u (соответственно v), то элемент $\bar{a} = \bar{b}$ из $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ не зависит от выбора морфизмов u и v, что доказывает предложение.

Определение 1. Элемент θ из $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ определяемый по формуле $\theta = (-1)^{n(n+1)/2}\bar{a} = (-1)^{n(n+1)/2}\bar{b}$, называется *классом, ассоциированным с точной последовательностью* (4).

Замечания. 1. Пусть (P, p) – проективная резольвента для M. Согласно предложению 3, с. 55, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \tilde{u}_n & & \uparrow \tilde{u}_{n-1} & & & & \uparrow \tilde{u}_0 \quad \uparrow 1_M \\
 & & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0.
\end{array}$$

В обозначениях из § 6, θ есть образ при изоморфизме $\varphi(P, N)$ гомотопического класса морфизма $P \to N$, определяемого отображением $(-1)^{n(n+1)/2}\tilde{u}_n$. Аналогично, если (e, E) – инъективная резольвента для N, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{n-1} \longrightarrow E^n \\
 & & \uparrow 1_N & & \uparrow \tilde{v}^0 & & & & \uparrow \tilde{v}^{n-1} \quad \uparrow \tilde{v}^n \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,
\end{array}$$

и θ есть образ при $\varphi(M, E)$ гомотопического класса морфизма $M \to E$, определяемого отображением $(-1)^{n(n+1)/2}\, \tilde{v}^n$. Это следует из конструкции класса θ и определений изоморфизмов $\varphi(P, N)$ и $\varphi(M, E)$.

2. Когда $n = 0$, точная последовательность (4) принимает вид $0 \to N \xrightarrow{f} M \to 0$, и ассоциированный с ней класс представляет собой $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Ext}^0_A(M, N)$.

4. Свойства класса, ассоциированного с точной последовательностью

Предложение 3. Пусть

$$0 \to P \to S_m \to S_{m-1} \to \ldots \to S_1 \xrightarrow{\lambda} N \to 0, \tag{6}$$

$$0 \to N \xrightarrow{\mu} R_n \to R_{n-1} \to \ldots \to R_1 \to M \to 0 \tag{7}$$

– *две точные последовательности левых A-модулей, которым соответствуют классы* $\theta \in \mathrm{Ext}^m_A(N, P)$ *и* $\theta' \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$. *Класс* в $\mathrm{Ext}^{m+n}_A(M, P)$, *ассоциированный с точной последовательностью*

$$0 \to P \to S_m \to \ldots \to S_1 \xrightarrow{\mu \circ \lambda} R_n \to \ldots \to R_1 \to M \to 0, \tag{8}$$

равен композиционному произведению $\theta \circ \theta'$.

Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & I^0(P) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & I^{m-1}(P) & \xrightarrow{\delta_P^{m-1}} & I^m(P) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_P} & & \uparrow{\scriptstyle w^0} & & & & \uparrow{\scriptstyle w^{m-1}} & & \uparrow{\scriptstyle w^m} \\
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & S_m & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & S_1 & \xrightarrow{\lambda} N & \longrightarrow 0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\varepsilon_N} & I^0(N) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & I^{n-1}(N) & \longrightarrow & I^n(N) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow{\scriptstyle t^0} & & & & \uparrow{\scriptstyle t^{n-1}} & & \uparrow{\scriptstyle t^n} \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\mu} & R_n & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow M & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Так как модуль $I^m(P)$ инъективен, существует гомоморфизм h^0: $I^0(N) \to I^m(P)$, для которого $w^m = h^0 \circ e_N$; согласно предложению 3 bis, с. 56, h^0 продолжается до морфизма комплексов h: $I(N) \to I(P)$ $(-m)$. Тогда $w^m = h^0 \circ e_N = h^0 \circ v^0 \circ \mu$, следовательно,

$$\delta_P^{m-1} \circ w^{m-1} = w^m \circ \lambda = h^0 \circ v^0 \circ (\mu \circ \lambda),$$

и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & I^0(P) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & I^{m-1}(P) & \longrightarrow & I^m(P) & \longrightarrow & I^{m+1}(P) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & I^{m+n}(P) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_P} & & \uparrow{\scriptstyle w^0} & & & & \uparrow{\scriptstyle w^{m-1}} & & \uparrow{\scriptstyle t^0} & & \uparrow{\scriptstyle t^1} & & & & \uparrow{\scriptstyle t^n} \\
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & S_m & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & S_1 & \xrightarrow{\mu \circ \lambda} & R_n & \longrightarrow & R_{n-1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & M \to 0,
\end{array}$$

где $t^0 = h^0 \circ v^0$, $t^1 = (-1)^m h^1 \circ v^1, \ldots, t^l = (-1)^{ml} h^l \circ v^l, \ldots, t^n = (-1)^{mn} h^n \circ v^n$. Класс θ, ассоциированный с точной последовательностью (6), – это класс отображения $(-1)^{m(m+1)/2} w^m \in \mathrm{Homgr}^m_A(N, I(P))$, следовательно, соответствует при изоморфизме $a_{N,P}$ классу морфизма $(-1)^{m(n+1)/2} h \in \mathrm{Homgr}^m_A(I(N), I(P))$; класс θ', ассоциированный с точной последовательностью (7), – это класс отображения $(-1)^{n(n+1)/2} v^n \in \mathrm{Homgr}^n_A(M, I(N))$; класс, ассоциированный с точной последовательностью (8), – это класс отображения $(-1)^{(m+n)(m+n+1)/2} t^n \in \mathrm{Homgr}^{m+n}_A(M, I(P))$, откуда следует искомый вывод, согласно определению композиционного произведения (с. 122) и формуле

$$m(m+1)/2 + n(n+1)/2 = (m+n)(m+n+1)/2 - mn.$$

Предложение 4. *Рассмотрим коммутативную диаграмму* A*-модулей с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & N & \to & R_n & \to & R_{n-1} & \to \dots \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \to & N' & \to & R'_n & \to & R'_{n-1} & \to \dots \to & R'_1 & \to & M' & \to & 0. \end{array}$$

Пусть θ (*соответственно* θ') – *класс первой* (*соответственно второй*) *строки в* $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ (*соответственно* $\mathrm{Ext}^n_A(M', N')$). *В* $\mathrm{Ext}^n_A(M, N')$ *справедливо соотношение:* $\theta' \circ f = g \circ \theta$.

Действительно, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & L_n(M) & \xrightarrow{d_n} & L_{n-1}(M) & \to \dots \to & L_0(M) & \xrightarrow{p_M} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u_n} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \to & N & \to & R_n & \to \dots \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \to & N' & \to & R'_n & \to \dots \to & R'_1 & \to & M' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^n} & & \\ 0 & \to & N' & \xrightarrow{e_{N'}} & I^0(N') & \xrightarrow{\delta^0} \dots \to & I^{n-1}(N') & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & I^n(N'). & & \end{array}$$

По определению, $\theta' \circ f$ есть класс морфизма $(-1)^{n(n+1)/2} v^n \circ f \circ p_M \in \mathrm{Homgr}^n_A(L(M), I(N'))$, тогда как $g \circ \theta$ есть класс морфизма $(-1)^{n(n+1)/2} e_{N'} \circ g \circ u_n$. Согласно предложению 1, примененному к крайним строкам диаграммы, эти два класса равны.

Следствие 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & N & \to & R_n & \to & \dots & \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \to & N & \to & R'_n & \to & \dots & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0; \end{array}$$

строки этой диаграммы имеют один и тот же ассоциированный класс в $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$.

Следствие 2. *Пусть*

$$0 \to N \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \xrightarrow{f_n} R_{n-1} \to \dots \xrightarrow{f_2} R_1 \xrightarrow{f_1} M \to 0$$

– *точная последовательность,* $\theta \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ – *ассоциированный с ней класс,* $a_1, \dots, a_{n+1} \in k$ *обратимы. Класс, ассоциированный с точной последовательностью*

$$0 \to N \xrightarrow{a_{n+1} f_{n+1}} R_n \xrightarrow{a_n f_n} R_{n-1} \to \dots \xrightarrow{a_2 f_2} R_1 \xrightarrow{a_1 f_1} M \to 0,$$

равен $(a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n+1}^{-1})\theta$.

Действительно, достаточно применить предложение к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & N & \xrightarrow{a_{n+1} f_{n+1}} & R_n & \to \dots \to & R_2 & \xrightarrow{a_2 f_2} & R_1 & \xrightarrow{a_1 f_1} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a_1 \dots a_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle a_1 \dots a_n} & & \downarrow{\scriptstyle a_1 a_2} & & \downarrow{\scriptstyle a_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \to & N & \xrightarrow{f_{n+1}} & R_n & \to \dots \to & R_2 & \xrightarrow{f_2} & R_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \to & 0. \end{array}$$

Следствие 3. *Пусть* $0 \to N \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \xrightarrow{f_n} \dots \to R_1 \xrightarrow{f_1} M \to 0$ – *точная последовательность,* θ – *ее класс в* $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$, $u\colon M' \to M$ *и* $v\colon N \to N'$ – *два гомоморфизма* A*-модулей.*

а) *Элемент* $v \circ \theta \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N')$ *равен классу точной последовательности*

$$0 \to N' \xrightarrow{f'_{n+1}} R'_n \xrightarrow{f'_n} R_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \to R_1 \to M \to 0,$$

в которой R'_n *есть* A*-фактормодуль модуля* $R_n \oplus N'$ *по подмодулю, образованному пара-*

ми $(f_{n+1}(x), -v(x))$ *для* $x \in N$, *а отображение* f'_{n+1} (*соответственно* f''_n) *получается из канонического вложения* (*соответственно из отображения* $(f_n, 0)$) *посредством перехода к фактормодулям.*

б) *Элемент* $\theta \circ u \in \mathrm{Ext}^n_A(M', N)$ *равен классу точной последовательности*

$$0 \to N \to R_n \to \ldots \to R_2 \xrightarrow{f''_2} R'_1 \xrightarrow{f''_1} M' \to 0,$$

в которой R'_1 *есть расслоенное произведение* $R_1 \times_M M'$, *т.е.* (I, p. 44) *подмодуль в* $R_1 \times M'$, *образованный парами* (x, y), *для которых* $f_1(x) = u(y)$, *а отображение* f''_2 (*соответственно* f''_1) *получается из* $(f_2, 0)$ (*соответственно из проекции на второй множитель*).

Докажем, например, а). Пусть z – элемент из R'_n, для которого $f'_n(z) = 0$; если z – класс пары (x, y), где $x \in R_n$, $y \in N'$, то $f_n(x) = 0$, так что существует элемент $t \in N$, для которого $x = f_{n+1}(t)$. Тогда $z = f'_{n+1}(y + v(t))$, что доказывает равенство $\mathrm{Ker} f'_n = \mathrm{Im} f'_{n+1}$. Инъективность f'_{n+1} следует из инъективности f_{n+1}.

Пусть j: $R_n \to R'_n$ – гомоморфизм, получаемый из канонического вложения; имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f_{n+1}} & R_n & \xrightarrow{f_n} & R_{n-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'_{n+1}} & R'_n & \xrightarrow{f'_n} & R_{n-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\ ;
\end{array}$$

утверждение а) следует теперь из предложения.

Доказательство утверждения б) аналогично.

Замечание. Пусть $\theta \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$, соответственно $\theta' \in \mathrm{Ext}^n_A(M', N')$, – класс некоторой точной последовательности

$$0 \to N \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \to \ldots \to R_1 \xrightarrow{f_1} M \to 0,$$

соответственно $0 \to N' \xrightarrow{f'_{n+1}} R'_n \to \ldots \to R'_n \xrightarrow{f'_1} M' \to 0$.

Пусть i_N, $i_{N'}$ – канонические вложения модулей N и N' в $N \oplus N'$, q_M, $q_{M'}$ проекции модуля $M \oplus M'$ на M и M'. Рассмотрим гомоморфизм

$$m = \mathrm{Ext}(q_M, i_N) \oplus \mathrm{Ext}(q_{M'}, i_{N'})$$

модуля $\mathrm{Ext}_A(M, N) \oplus \mathrm{Ext}_A(M', N')$ в $\mathrm{Ext}_A(M \oplus M', N \oplus N')$. *Элемент*

$$m(\theta, \theta') = i_N \circ \theta \circ q_M + i_{N'} \circ \theta' \circ q_{M'}$$

представляет собой класс точной последовательности

$$0 \to N \oplus N' \xrightarrow{f_{n+1} \oplus f'_{n+1}} R_n \oplus R'_n \to \ldots \to R_1 \oplus R'_1 \xrightarrow{f_1 \oplus f'_1} M \oplus M' \to 0.$$

Действительно, если обозначить этот класс через θ'', то из предложения 4 будет следовать, что

$$\theta'' \circ i_M = i_N \circ \theta = m(\theta\ \theta') \circ i_M \quad \text{и} \quad \theta'' \circ i_{M'} = i_{N'} \circ \theta' = m(\theta, \theta') \circ i_{M'}.$$

согласно предложению 7, с. 94, это влечет, что $\theta'' = m(\theta, \theta')$.

5. Связь между точными последовательностями и элементами из $\mathrm{Ext}_A(M, N)$

Теорема 1. *Пусть n – целое число* $\geqslant 1$, M *и* N – *два* A-*модуля.*

а) *Всякий элемент из* $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ *представляет собой класс некоторой точной последовательности* (с. 124, определение 1).

б) *Пусть*

$$0 \to N \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \xrightarrow{f_n} \ldots \to R_1 \xrightarrow{f_1} M \to 0$$

и

$$0 \to N \xrightarrow{f'_{n+1}} R'_n \xrightarrow{f'_n} \ldots \to R'_1 \xrightarrow{f'_1} M \to 0$$

– две точные последовательности, θ и θ' – ассоциированные классы. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\theta = \theta'$;

(ii) *существует коммутативная диаграмма с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \xrightarrow{f_{n+1}} & R_n & \to & \dots & \to & R_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & R''_n & \to & \dots & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \xrightarrow{f'_{n+1}} & R'_n & \to & \dots & \to & R'_1 & \xrightarrow{f'_1} & M & \to & 0;
\end{array}$$

(iii) *существует коммутативная диаграмма с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \xrightarrow{f_{n+1}} & R_n & \to & \dots & \to & R_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & R''_n & \to & \dots & \to & R''_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \xrightarrow{f'_{n+1}} & R'_n & \to & \dots & \to & R'_1 & \xrightarrow{f'_1} & M & \to & 0.
\end{array}$$

Докажем а). Пусть $\alpha \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$, и пусть P – проективная резольвента для M. Пусть a: $P(n) \to N$ – морфизм комплексов, представляющий элемент α; его единственной ненулевой компонентой является некоторый A-гомоморфизм u: $P_n \to N$, удовлетворяющий условию $u \circ d_{n+1} = 0$ и, следовательно, разлагающийся в композицию $u = \bar{u} \circ \delta_n$, где δ_n: $P_n \to Z_{n-1}$ – отображение, индуцированное гомоморфизмом d_n (мы полагаем $Z_{n-1} = \mathrm{Im}\, d_n$), а $\bar{u}$ – некоторый A-гомоморфизм модуля Z_{n-1} в N. Согласно замечанию 1, с. 124, класс $\theta \in \mathrm{Ext}^n_A(M, Z_{n-1})$ точной последовательности

$$0 \to Z_{n-1} \to P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to M \to 0$$

равен гомотопическому классу морфизма $(-1)^{n(n+1)/2}\delta_n$. Имеем, следовательно,

$$\alpha = (-1)^{n(n+1)/2}\,\bar{u} \circ \theta,$$

что позволяет, согласно следствию 3, с. 126, представить α как класс некоторой точной последовательности.

Докажем б). Из следствия 1 (с. 126) вытекает, что (ii) $\Rightarrow$ (i) и (iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что выполняется условие (i), и пусть P – проективная резольвента для M. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \xrightarrow{f_{n+1}} & R_n & \to & R_{n-1} & \to & \dots & \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle u_n} & & \uparrow{\scriptstyle u_{n-1}} & & \uparrow{\scriptstyle u_{n-2}} & & & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
 & & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \to & P_{n-2} & \to & \dots & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u'_n} & & \downarrow{\scriptstyle u'_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle u'_{n-2}} & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \xrightarrow{f'_{n+1}} & R'_n & \to & R'_{n-1} & \to & \dots & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0.
\end{array}$$

Морфизмы комплекса $P(n)$ в N, определяемые отображениями u_n и u'_n, гомотопны, так как они принадлежат одному и тому же классу $(-1)^{n(n+1)/2}\theta$, следовательно, разность $u'_n - u_n$ представима в виде $w \circ d_n$, где w: $P_{n-1} \to N$ – некоторый A-гомоморфизм. Заменяя u'_{n-1} на $u'_{n-1} - f'_{n+1} \circ w$ и u'_n на u_n, мы сводим доказательство к случаю, когда $u_n = u'_n$. Это позволяет построить новую коммутативную диаграмму

с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \to & R_n & \to & R_{n-1} & \to & \dots & \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow{\scriptstyle r} & & \uparrow{\scriptstyle u_{n-2}} & & & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & N' & \to & P_{n-2} & \to & \dots & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow{\scriptstyle r'} & & \downarrow{\scriptstyle u'_{n-2}} & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & R'_n & \to & R'_{n-1} & \to & \dots & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0,
\end{array}$$

где N' – фактормодуль модуля $P_{n-1} \oplus N$ по подмодулю, образованному парами $(d_n(x), -u_n(x))$ для $x \in P_n$, и где отображение v (соответственно v') определяется посредством перехода к фактормодулю отображением $u_{n-1} \oplus f_{n+1}$ (соответственно $u'_{n-1} \oplus f'_{n+1}$). Условие (ii), таким образом, удовлетворяется.

Снова предположим, что выполняется условие (i), и пусть E – инъективная резольвента для N. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \to & R_n & \to & \dots & \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow{\scriptstyle v_0} & & & & \downarrow{\scriptstyle v_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle v_n} & & \\
0 & \to & N & \to & E^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \dots & \to & E^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & E^n & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow{\scriptstyle v'_0} & & & & \uparrow{\scriptstyle v'_{n-1}} & & \uparrow{\scriptstyle v'_n} & & \\
0 & \to & N & \to & R'_n & \to & \dots & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0,
\end{array}$$

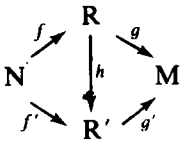
и так же, как и выше, можно считать, что $v'_n = v_n$. Тогда имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \to & R_n & \to & \dots & \to & R_2 & \to & R_1 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & E^0 & \to & \dots & \to & E^{n-2} & \to & M' & \to & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \to & N & \to & R'_n & \to & \dots & \to & R'_2 & \to & R'_1 & \to & M & \to & 0,
\end{array}$$

в которой $M' = M \times_{E^n} E^{n-1}$ (с. 127, следствие 3, б)). Условие (iii), таким образом, удовлетворяется, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Если кольцо A нётерово и если модули M и N конечного типа, то из доказательства утверждения а) следует, что всякий элемент в $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ представляет собой класс, ассоциированный с точной последовательностью $0 \to N \to R_n \to \dots \to R_1 \to M \to 0$, в которой R_i – модули конечного типа.

Следствие. *Пусть* $0 \to N \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} M \to 0$ *и* $0 \to N \xrightarrow{f'} R' \xrightarrow{g'} M \to 0$ – *две точные последовательности,* θ *и* θ' – *их ассоциированные классы в* $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$. *Для того чтобы* $\theta = \theta'$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал* A-*гомоморфизм* $h: R \to R'$, *делающий диаграмму*



коммутативной. Всякий такой гомоморфизм непременно является изоморфизмом.

Условие достаточно согласно следствию 1 предложения 4. Если $\theta = \theta'$, то имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 1_N} & & \uparrow{\scriptstyle h'} & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow{\scriptstyle h''} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Гомоморфизмы h' и h'' являются изоморфизмами согласно следствию 3, с. 11, и $h = h'' \circ h'^{-1}$ отвечает нашему требованию. Последнее утверждение — также результат упомянутого следствия 3, с. 11.

Замечание 2. Теорема 1 дает описание $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ как множества классов эквивалентности точных последовательностей; легко описать групповой закон, который мы получаем на этом множестве переносом структуры. Действительно, пусть θ (соответственно θ') — класс точной последовательности $0 \to N \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \xrightarrow{f_n} \ldots \to R_1 \to M \to 0$ (соответственно $0 \to N \xrightarrow{f'_{n+1}} R'_n \xrightarrow{f'_n} \ldots \to R'_1 \to M \to 0$). Пусть $\Delta: M \to M \oplus M$ и $\nabla: N \oplus N \to N$ — A-линейные отображения, определяемые по формулам $\Delta(x) = (x, x)$ для $x \in M$ и $\nabla(y, z) = y + z$ для $y, z \in N$. Рассмотрим отображение

$$m: \mathrm{Ext}_A(M, N) \oplus \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M \oplus M,\ N \oplus N),$$

определенное в замечании на с. 127. В обозначениях из этого замечания имеем: $\nabla \circ i_N = 1_N$ и $q_M \circ \Delta = 1_M$, и, следовательно, $\theta + \theta' = \nabla \circ m(\theta, \theta') \circ \Delta$. С учетом вышеупомянутого замечания и следствия 3, с. 126–127, это дает точную последовательность класса $\theta + \theta'$; если, например, $n \geqslant 2$, то можно взять последовательность

$$0 \to N \to R''_n \to R_{n-1} \oplus R'_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1} \oplus f'_{n-1}} \ldots \to R_2 \oplus R'_2 \to R''_1 \to M \to 0,$$

где R''_n — фактормодуль модуля $R_n \oplus R'_n$ по подмодулю, образованному парами

$$(f_{n+1}(x),\ -f'_{n+1}(x)) \quad \text{для} \quad x \in N,$$

и где $R''_1 = R_1 \times_M R'_1$.

6. Композиционное произведение и связывающие гомоморфизмы для модулей расширений

Предложение 5. *Пусть*

$$(\&)\quad 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

точная последовательность левых A*-модулей,* $\theta \in \mathrm{Ext}^1_A(M'', M')$ *— ассоциированный класс,* N *— левый* A*-модуль,* n *— целое число.*

а) *Связывающий гомоморфизм* $\delta^n(N, \&): \mathrm{Ext}^n_A(N, M'') \to \mathrm{Ext}^{n+1}_A(N, M')$ *представляет собой композиционное произведение* $\alpha \mapsto \theta \circ \alpha$ *на* θ.

б) *Связывающий гомоморфизм* $\delta^n(\&, N): \mathrm{Ext}^n_A(M', N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M'', N)$ *представляет собой композиционное произведение* $\alpha \mapsto (-1)^{n+1}\alpha \circ \theta$ *на* $(-1)^{n+1}\theta$.

а) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M'}} & & \downarrow{\scriptstyle v^0} & & \downarrow{\scriptstyle v^1} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{e_{M'}} & I^0(M') & \xrightarrow{\delta^0} & I^1(M') & &
\end{array}$$

По определению, θ есть класс морфизма $-v^1 \in \mathrm{Homgr}^1_A(M'', I(M'))$. С другой стороны, $\alpha \in \mathrm{Ext}^n_A(N, M'')$ представляется некоторым элементом a из $\mathrm{Homgr}^n_A(L(N), M'')$. По построению, элемент $\delta^n(\alpha)$ получается следующим образом: гомоморфизм

$a^n \in \mathrm{Hom}_A(L_n(N), M'')$ поднимается до гомоморфизма

$b \in \mathrm{Hom}_A(L_n(N), M)$,

и $\delta^n(\alpha)$ есть класс морфизма $e_{M'} \circ c$, где $c \in \mathrm{Hom}_A(L_{n+1}(N), M')$ – гомоморфизм, для которого

$$f \circ c = Db = (-1)^{n+1} b \circ d_{n+1}.$$

Имеем, следовательно, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & L_{n+1}(N) & \xrightarrow{d_{n+1}} & L_n(N) & & & & \\
 & & {\scriptstyle (-1)^{n+1}c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & \searrow{\scriptstyle a^n} & & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1_{M'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^0} & & \downarrow{\scriptstyle v^1} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{e_{M'}} & I^0(M') & \xrightarrow{\delta^0} & I^1(M') & &
\end{array}.$$

Но в $\mathrm{Homgr}_A(L(N), I(M'))$ имеем:

$$D(v^0 \circ b) = \delta^0 \circ v^0 \circ b - (-1)^n v^0 \circ b \circ d_{n+1} = v^1 \circ a^n + e_{M'} \circ c.$$

Классы морфизмов $e_{M'} \circ c$ и $(-v^1) \circ a$ в $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, M')$, следовательно, равны, откуда получаем а).

б) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & L_1(M'') & \xrightarrow{d_1} & L_0(M'') & \xrightarrow{p_{M''}} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

По определению, θ есть класс морфизма $-u_1 \in \mathrm{Homgr}_A^1(L(M''), M')$. С другой стороны, $\alpha \in \mathrm{Ext}_A^n(M', N)$ представляется некоторым элементам a нз $\mathrm{Homgr}_A^n(M', I(N))$. По построению, элемент $\delta^n(\alpha)$ получается следующим образом: продолжаем гомоморфизм $a^n \in \mathrm{Hom}_A(M', I^n(N))$ до гомоморфизма

$b \in \mathrm{Hom}_A(M, I^n(N))$,

и $\delta^n(\alpha)$ есть класс морфизма $c \circ p_{M''}$, где $c \in \mathrm{Hom}_A(M'', I^{n+1}(M))$ – гомоморфизм, для которого

$$g \circ c = Db = \delta^{n+1} \circ b.$$

Имеем, следовательно, коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & L_1(M'') & \xrightarrow{d_1} & L_0(M'') & \xrightarrow{p_{M''}} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle u_1}\downarrow & & {\scriptstyle u_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \searrow{\scriptstyle a^n} & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & \\
 & & & & I^n(N) & \xrightarrow{\delta^n} & I^{n+1}(N) & &
\end{array}.$$

Но в $\mathrm{Homgr}_A(L(M''), I(N))$ имеем:

$$D(b \circ u_0) = \delta^n \circ b \circ u_0 - (-1)^n b \circ u_0 \circ d_1 = c \circ p_{M''} - (-1)^n a^n \circ u_1.$$

Классы морфизмов $c \circ p_{M''}$ и $(-1)^{n+1} a^n \circ (-u_1)$ в $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M', N)$, следовательно, равны, откуда получаем б).

Следствие 1. а) *Связывающий гомоморфизм* $\mathrm{Hom}_A(M'', M'') \to \mathrm{Ext}_A^1(M'', M')$ *отображает* $1_{M''}$ *на* θ.

б) *Связывающий гомоморфизм* $\mathrm{Hom}_A(M', M') \to \mathrm{Ext}_A^1(M'', M')$ *отображает* $1_{M'}$ *на* $-\theta$.

Следствие 2. *Рассмотрим две точные последовательности левых* A*-модулей:*

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$

$0 \to N' \to N \to N'' \to 0.$

Композиции связывающих гомоморфизмов

$$\mathrm{Ext}_A^n(M', N'') \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N'') \to \mathrm{Ext}_A^{n+2}(M'', N')$$

и

$$\mathrm{Ext}_A^n(M', N'') \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M', N') \to \mathrm{Ext}_A^{n+2}(M'', N').$$

противоположны друг другу.

Действительно, если θ_1, θ_2 — классы, ассоциированные с данными точными последовательностями, и если $\alpha \in \mathrm{Ext}_A^n(M', N'')$, то образы α равны соответственно $\theta_2 \circ ((-1)^{n+1}\alpha \circ \theta_1)$ и $(\theta_2 \circ \alpha) \circ ((-1)^{n+2}\theta_1)$.

Рассмотрим точную последовательность левых A-модулей

$$(\mathcal{S})\quad 0 \to N \to R_n \xrightarrow{f_n} R_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \to R_1 \xrightarrow{f_1} M \to 0$$

и положим $K_0 = M$, $K_i = \mathrm{Ker}\, f_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $K_n = N$. Имеем, таким образом, точные последовательности:

$$0 \to K_i \to R_i \to K_{i-1} \to 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{9}$$

которым для всякого левого A-модуля P соответствуют связывающие гомоморфизмы:

$$\mathrm{Ext}_A^m(P, K_{i-1}) \to \mathrm{Ext}_A^{m+1}(P, K_i),$$

$$\mathrm{Ext}_A^m(K_i, P) \to \mathrm{Ext}_A^{m+1}(K_{i-1}, P),$$

откуда посредством композиции получаем *итерированные связывающие гомоморфизмы,* ассоциированные с точной последовательностью $(\mathcal{S})$:

$$\delta^m(P, \mathcal{S}):\ \mathrm{Ext}_A^m(P, M) \to \mathrm{Ext}_A^{m+n}(P, N),$$

$$\delta^m(\mathcal{S}, P):\ \mathrm{Ext}_A^m(N, P) \to \mathrm{Ext}_A^{m+n}(M, P).$$

Следствие 3. *Если* $\theta \in \mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ *— класс точной последовательности* $(\mathcal{S})$, *то*

$$\delta^m(P, \mathcal{S})(\alpha) = \theta \circ \alpha, \quad \delta^m(\mathcal{S}, P)(\beta) = (-1)^{mn+n(n+1)/2}\beta \circ \theta.$$

Если $\theta_i \in \mathrm{Ext}_A^1(K_{i-1}, K_i)$ — класс, ассоциированный с точной последовательностью (9), то, согласно предложению 5, имеем:

$$\delta^m(P, \mathcal{S})(\alpha) = \theta_n \circ \ldots \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \alpha,$$

$$\delta^m(\mathcal{S}, P)(\beta) = (-1)^{(m+1)+\ldots+(m+n)}\beta \circ \theta_n \circ \ldots \circ \theta_1.$$

Кроме того, согласно предложению 3 (с. 125), имеем, что $\theta = \theta_n \circ \ldots \circ \theta_1$. Следствие непосредственно вытекает отсюда и из соотношения (E, III, p. 44)

$$(m+1) + \ldots + (m+n) = mn + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следствие 4. *Если каждый модуль* R_i, $i = 1, \ldots, n$, *инъективен (соответственно проективен), то отображение* $\alpha \mapsto \theta \circ \alpha$ *(соответственно* $\alpha \mapsto \alpha \circ \theta$*) из* $\mathrm{Ext}_A^m(P, M)$ *в* $\mathrm{Ext}_A^{m+n}(P, N)$ *(соответственно из* $\mathrm{Ext}_A^m(N, P)$ *в* $\mathrm{Ext}_A^{m+n}(M, P)$*) биективно для всякого* A*-модуля* P *и всякого* $m > 0$.

Действительно, это вытекает из следствия 3 и из точных последовательностей

$$\mathrm{Ext}_A^{m+i-1}(P, R_i) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i-1}(P, K_{i-1}) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i}(P, K_i) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i}(P, R_i),$$

(соответственно

$$\mathrm{Ext}_A^{m+i-1}(R_i, P) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i-1}(K_i, P) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i}(K_{i-1}, P) \to \mathrm{Ext}_A^{m+i}(R_i, P))$$

крайние члены которых нулевые по предположению.

Замечание. Определения и предложения из п. 3–6 применимы к *правым* A-модулям, рассматриваемым как левые модули над кольцом A°, противоположным A.

7. Гомоморфизм $\mathrm{Ext}_A(P, Q) \otimes \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^A(Q, M)$

Пусть M – левый A-модуль, P и Q – два правых A-модуля. Рассмотрим гомоморфизм $\mathrm{Homgr}_A(L(P), L(Q)) \otimes_k (L(P) \otimes_A L(M)) \to L(Q) \otimes_A L(M)$, который элементу $f \otimes (x \otimes y)$ сопоставляет $f(x) \otimes y$. Согласно сказанному на с. 101, это морфизм комплексов [1]). Из него получаем градуированное k-линейное отображение степени 0

$$H(\mathrm{Homgr}_A(L(P), L(Q))) \otimes_k \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^A(Q, M),$$

следовательно, посредством изоморфизма $\varphi(L(P), L(Q))$ из § 6 (с. 103, теорема 1), градуированное k-линейное отображение степени 0

$$\mathrm{Ext}_A(P, Q) \otimes_k \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^A(Q, M), \tag{10}$$

соответствующее k-билинейным отображениям

$$c_{P,Q;M}\colon \mathrm{Ext}_A^n(P, Q) \times \mathrm{Tor}_m^A(P, M) \to \mathrm{Tor}_{m-n}^A(Q, M); \tag{11}$$

образ пары (α, γ) при отображении $c_{P,Q;M}$ называется *композиционным произведением* элементов α и γ и обозначается через $\alpha \circ \gamma$.

По построению, $\alpha \circ \gamma$ получается следующим образом: α представляется некоторым морфизмом комплексов f: $L(P) \to L(Q)(-n)$, γ – элементом $z \in Z_m(L(P) \otimes_A L(M))$, и $\alpha \circ \gamma$ есть класс элемента

$$(f \otimes 1)(z) \in Z_m(L(Q)(-n) \otimes_A L(M)) = Z_{m-n}(L(Q) \otimes_A L(M)).$$

Например, если $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(P, Q)$, то $\alpha \circ \gamma = \mathrm{Tor}(\alpha, 1)(\gamma)$.

Замечания 1. Если использовать изоморфизмы ψ, рассмотренные на с. 76, то можно также определить композиционное произведение посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A^n(P, Q) \times \mathrm{Tor}_m^A(P, M) & \xrightarrow{c_{P,Q;M}} & \mathrm{Tor}_{m-n}^A(Q, M) \\ \downarrow \bar{a}_{P,Q} \times \psi_P(M) & & \downarrow \psi_Q(M) \\ H^n(\mathrm{Homgr}_A(L(P), L(Q))) \times H_m(L(P) \otimes_A M) & \longrightarrow & H_{m-n}(L(Q) \otimes_A M) \end{array};$$

другими словами, мы представляем α морфизмом f из $L(P)$ в $L(Q)(-n)$, γ – циклом $x \in L_m(P) \otimes_A M$, и $\alpha \circ \gamma$ есть класс цикла

$$(f_m \otimes 1_M)(x) \in L_{m-n}(Q) \otimes_A M.$$

---

[1]) Если R, S – комплексы правых A-модулей и T – комплекс левых A-модулей, то так же, как на с. 101, легко проверяется, что канонический гомоморфизм

$$u\colon \mathrm{Homgr}_A(R, S) \to \mathrm{Homgr}_k(R \otimes_A T, S \otimes_A T)$$

представляет собой морфизм комплексов. Используемый в тексте морфизм комплексов получается как композиция морфизма $u \otimes 1_{R \otimes T}$ и морфизма (18), с. 101. Отметим, что канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Homgr}_A(S, T) \to \mathrm{Homgr}_k(R \otimes_A S, R \otimes_A T),$$

где R – комплекс правых A-модулей и S, T – комплексы левых A-модулей, не является морфизмом комплексов. Поэтому гомоморфизм

$$\mathrm{Ext}_A^r(M, N) \otimes \mathrm{Tor}_m^A(P, M) \to \mathrm{Tor}_{m-r}^A(P, N)$$

определяется ниже (с. 134) с помощью изоморфизмов коммутирования. – *Примеч. пер.*

2. Можно также использовать резольвенты I(P) и I(Q).

Аналогично, если N – второй левый A-модуль, то определяется композиционное произведение $(\mu, \gamma) \mapsto \mu \circ \gamma$, обозначаемое через

$$c_{P;M,N}\colon \operatorname{Ext}_A^r(M, N) \times \operatorname{Tor}_m^A(P, M) \to \operatorname{Tor}_{m-r}^A(P, N),$$

посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ext}_A^r(M, N) \times \operatorname{Tor}_m^A(P, M) & \xrightarrow{c_{P;M,N}} & \operatorname{Tor}_{m-r}^A(P, N) \\ \downarrow 1 \times \sigma_{P,M,r} & & \downarrow \sigma_{P,N,m-r} \\ \operatorname{Ext}_{A^\circ}^r(M^\circ, N^\circ) \times \operatorname{Tor}_m^{A^\circ}(M^\circ, P^\circ) & \xrightarrow{c_{M^\circ,N^\circ;P^\circ}} & \operatorname{Tor}_{m-r}^{A^\circ}(N^\circ, P^\circ), \end{array} \tag{12}$$

где σ обозначает гомоморфизмы коммутирования (с. 78).

Если $\mu \in \operatorname{Ext}_A^r(M, N)$ – класс морфизма $g\colon L(M) \to L(N)(-r)$ и если $\gamma \in Z \in \operatorname{Tor}_m^A(P, M)$ – класс цикла $z = \sum_{i,j} z_{ij}$, где $z_{ij} \in L_i(P) \otimes_A (L_j(M))$, то $\mu \circ \gamma$ есть, таким образом, класс цикла $\sum_{i,j} (-1)^{ir} (1 \otimes g)(z_{ij})$.

Можно также представить γ циклом $y \in P \otimes L_m(M)$, и $\mu \circ \gamma$ есть в этом случае класс цикла $(1 \otimes g)(y) \in P \otimes L_{m-r}(M)$.

Предложение 6. *Пусть* K, M, N – *левые* A-*модули*, P, Q, R – *правые* A-*модули*,

$$\alpha \in \operatorname{Ext}_A^n(P, Q), \quad \beta \in \operatorname{Ext}_A^p(Q, R), \quad \lambda \in \operatorname{Ext}_A^r(K, M),$$

$$\mu \in \operatorname{Ext}_A^s(M, N), \quad \gamma \in \operatorname{Tor}_m^A(P, K).$$

Тогда

$$(\beta \circ \alpha) \circ \gamma = \beta \circ (\alpha \circ \gamma) \quad в \quad \operatorname{Tor}_{m-p-n}^A(R, K), \tag{13}$$

$$(\mu \circ \lambda) \circ \gamma = \mu \circ (\lambda \circ \gamma) \quad в \quad \operatorname{Tor}_{m-r-s}^A(P, N), \tag{14}$$

$$\alpha \circ (\lambda \circ \gamma) = (-1)^{nr} \lambda \circ (\alpha \circ \gamma) \quad в \quad \operatorname{Tor}_{m-n-r}^A(Q, M). \tag{15}$$

Формулы (13) и (14) немедленно следуют из определений. Докажем (15). Пусть $z = \Sigma z_{ij}$, $z_{ij} \in L_i(P) \otimes L_j(K)$, – цикл, представляющий γ, $f\colon L(P) \to L(Q)(-n)$ и $g\colon L(K) \to L(M)(-r)$ – морфизмы, представляющие α и λ. Тогда $\lambda \circ (\alpha \circ \gamma)$ есть класс цикла $\Sigma(-1)^{(i-n)r}(f \otimes g)(z_{ij})$, а $\alpha \circ (\lambda \circ \gamma)$ есть класс цикла $\Sigma(-1)^{ir}(f \otimes g)(z_{ij})$, откуда получаем (15).

8. Композиционные произведения и связывающие гомоморфизмы для произведений кручения

Предложение 7. а) *Пусть*

$$(\&)\quad 0 \to P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} P'' \to 0$$

– *точная последовательность правых* A-*модулей*, $\theta \in \operatorname{Ext}_A^1(P'', P')$ – *ее ассоциированный класс*, M – *левый* A-*модуль. Связывающий гомоморфизм*

$$\delta_n(\&, M)\colon \operatorname{Tor}_n^A(P'', M) \to \operatorname{Tor}_{n-1}^A(P', M)$$

представляет собой отображение $\gamma \mapsto \theta \circ \gamma$.

б) *Пусть*

$$(\&_1)\quad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

– *точная последовательность левых* A-*модулей*, $\theta_1 \in \operatorname{Ext}_A^1(M'', M')$ – *ее ассоциированный класс*, P – *правый* A-*модуль. Связывающий гомоморфизм*

$$\delta_n(P, \&_1)\colon \operatorname{Tor}_n^A(P, M'') \to \operatorname{Tor}_{n-1}^A(P, M')$$

представляет собой отображение $\gamma \mapsto \theta_1 \circ \gamma$.

Пусть $\gamma \in \mathrm{Tor}_n^A(P'', M)$ – класс цикла $z'' \in Z_n(L(P'') \otimes_A L(M))$, и пусть

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle u_1} & & \uparrow{\scriptstyle u_0} & & \uparrow{\scriptstyle 1} \\ & & L_1(P'') & \xrightarrow{d_1} & L_0(P'') & \xrightarrow{p_0''} & P'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

– коммутативная диаграмма. Мы будем обозначать через p': $L(P') \to P'$ и p'': $L(P'') \to P''$ канонические морфизмы комплексов. По определению, $\delta(\gamma) \in \mathrm{Tor}_{n-1}^A(P', M)$ получается следующим образом: выбираем элемент $x \in P \otimes L_n(M)$, для которого $(g \otimes 1)(x) = (p'' \otimes 1)(z'')$ и $\delta(\gamma)$ есть класс циклов $z' \in Z_{n-1}(L(P') \otimes L(M))$, для которых

$$(f \otimes 1)(p' \otimes 1)(z') = (1 \otimes d_n)(x).$$

При $0 \leqslant i \leqslant n$ обозначим через z_i'' компоненту элемента z'' в $L_i(P'') \otimes L_{n-i}(M)$, имеем

$$0 = Dz'' = \sum_i (d_i \otimes 1 + (-1)^i \otimes d_{n-i})(z_i''),$$

следовательно, $(d_i \otimes 1)(z_i'') = (-1)^i \otimes d_{n-i+1}(z_{i-1}'')$, и, в частности,

$$(d_1 \otimes 1)(z_1'') = -1 \otimes d_n(z_0'').$$

Теперь можно выбрать $x = (u_0 \otimes 1)(z_0'')$; в самом деле, имеем:

$$(g \otimes 1)(x) = (p_0'' \otimes 1) z_0'' = (p'' \otimes 1)(z'').$$

Так как

$$(1 \otimes d_n)(x) = (u_0 \otimes 1)(1 \otimes d_n)(z_0'') = -(u_0 \otimes 1)(d_1 \otimes 1)(z_1'') = -(f \otimes 1)(u_1 \otimes 1)(z_1''),$$

то отсюда следует, что $\delta(\gamma)$ есть класс циклов $z' \in Z_{n-1}(L(P') \otimes_A L(M))$, для которых $(p' \otimes 1)(z') = -(u_1 \otimes 1)(z_1'')$. Но, по определению, класс θ соответствует при изоморфизме $\mathrm{Ext}_A^1(P'', P') \to H^1(\mathrm{Homgr}_A(L(P''), P')$ классу морфизма h: $L(P'')(1) \to P'$, определяемого отображением $-u_1$, и произведение $\theta \circ \gamma$ есть класс циклов

$$\bar{z}' \in Z_{n-1}(L(P') \otimes_A L(M)),$$

для которых

$$(p' \otimes 1)(\bar{z}') = (h \otimes 1)(z'') = -(u_1 \otimes 1)(z_1''),$$

что завершает доказательство утверждения а). Утверждение б) выводится из а) с помощью изоморфизмов коммутирования.

Следствие 1. *Пусть* $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ – *точная последовательность правых* A*-модулей,* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – *точная последовательность левых* A*-модулей. Композиции связывающих гомоморфизмов*

$$\mathrm{Tor}_n^A(P'', M'') \to \mathrm{Tor}_{n-1}^A(P'', M') \to \mathrm{Tor}_{n-2}^A(P', M')$$

и

$$\mathrm{Tor}_n^A(P'', M'') \to \mathrm{Tor}_{n-1}^A(P', M'') \to \mathrm{Tor}_{n-2}^A(P', M')$$

противоположны друг другу.

Действительно, если θ и θ_1 – классы, ассоциированные с данными точными последовательностями, и если $\gamma \in \mathrm{Tor}_n^A(P'', M'')$, то образы γ равны соответственно $\theta \circ (\theta_1 \circ \gamma)$ и $\theta_1 \circ (\theta \circ \gamma)$ и, следовательно, противоположны согласно предложению 6.

Воспользуемся снова обозначениями со с. 132, и рассмотрим последовательность левых A-модулей ($\mathcal{S}$) и связывающие гомоморфизмы, соответствующие точным последовательностям (9):

$$\mathrm{Tor}_m^A(P, K_{i-1}) \to \mathrm{Tor}_{m-1}^A(P, K_i);$$

из них посредством композиции получаем *итерированные связывающие гомоморфизмы*

$$\partial_m(P, \mathcal{S}): \mathrm{Tor}_m^A(P, M) \to \mathrm{Tor}_{m-n}^A(P, N).$$

Согласно предложению 7 и предложению 3, с. 125, имеет место

Следствие 2. *Если* $\theta \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ – *класс, ассоциированный с точной последовательностью* $(\mathcal{S})$, *то* $\partial_m(\mathrm{P}, \mathcal{S})(\alpha) = \theta \circ \alpha$ *для всякого* $\alpha \in \mathrm{Tor}_{n}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M})$.

Следствие 3. *Если все модули* R_i, $i = 1, \ldots, n$, *плоские, то отображение* $\alpha \mapsto \theta \circ \alpha$ *из* $\mathrm{Tor}_{m+n}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M})$ *в* $\mathrm{Tor}_{m}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{N})$ *биективно для всякого правого* A-*модуля* P *и всякого целого* $m > 0$.

Это вытекает из следствия 2 и точных последовательностей

$$\mathrm{Tor}_{m+n-i+1}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{R}_i) \to \mathrm{Tor}_{m+n-i+1}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{K}_{i-1}) \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{m+n-i}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{K}_i) \to \mathrm{Tor}_{m+n-i}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{R}_i),$$

в которых крайние члены нулевые по предположению.

Аналогично, если

$$(\mathcal{S}_1) \quad 0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_{n-1} \to \ldots \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{P} \to 0$$

– точная последовательность правых A-модулей и M – левый A-модуль, то определяются *итерированные связывающие гомоморфизмы*

$$\partial_m(\mathcal{S}_1, \mathrm{M}): \mathrm{Tor}_{m}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Tor}_{m-n}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Q}, \mathrm{M})$$

и имеет место:

Следствие 4. *Если* $\theta_1 \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ – *класс, ассоциированный с точной последовательностью* $(\mathcal{S}_1)$, *то* $\partial_m(\mathcal{S}_1, \mathrm{M})(\alpha) = \theta_1 \circ \alpha$ *для всякого* $\alpha \in \mathrm{Tor}_{n}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M})$.

9. Вычисление композиционных произведений посредством сдвига резольвент

Пусть

$$0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{K}_n \to \mathrm{K}_{n-1} \to \ldots \to \mathrm{K}_1 \xrightarrow{g} \mathrm{M}' \to 0 \tag{16}$$

–точная последовательность левых A-модулей и $\theta \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M}', \mathrm{M})$ – ее ассоциированный класс.

Пусть a: $(\mathrm{R}, d) \to \mathrm{M}$ – левая резольвента для M; имеем, таким образом, точную последовательность

$$\to \mathrm{R}_k \xrightarrow{d_k} \mathrm{R}_{k-1} \to \ldots \xrightarrow{d_1} \mathrm{R}_0 \xrightarrow{a_0} \mathrm{M} \to 0$$

и, посредством сдвига на n (с. 32), точную последовательность

$$\to \mathrm{R}_k \xrightarrow{(-1)^n d_k} \mathrm{R}_{k-1} \to \ldots \xrightarrow{(-1)^n d_1} \mathrm{R}_0 \xrightarrow{(-1)^n a_0} \mathrm{M} \to 0. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем точную последовательность

$$\to \mathrm{R}_k \xrightarrow{(-1)^n d_k} \mathrm{R}_{k-1} \to \ldots \xrightarrow{(-1)^n d_1} \mathrm{R}_0 \xrightarrow{(-1)^n f \circ a_0} \mathrm{K}_n \to \mathrm{K}_{n-1} \to \ldots \to \mathrm{K}_1 \to \mathrm{M}' \to 0,$$

дающую резольвенту R' для M'; обозначим через φ: $\mathrm{R}' \to \mathrm{R}(-n)$ морфизм, при котором $\varphi_k = 1_{\mathrm{R}_{k-n}}$ для $k \geqslant n$.

Если N – левый A-модуль и P – правый A-модуль, то имеем, следовательно, гомоморфизмы:

$\mathrm{H}(1_{\mathrm{P}} \otimes \varphi)$: $\mathrm{H}(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}') \to \mathrm{H}(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R})(-n)$,

$\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_{\mathrm{A}}(\varphi, 1_{\mathrm{N}}))$: $\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}, \mathrm{N}))(n) \to \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}', \mathrm{N}))$.

Пусть k – целое число.

Предложение 8. а) *Следующая диаграмма, в которой* $h_\theta(\alpha) = (-1)^{n(n-1)/2}\theta \circ \alpha$, *коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_{k+n}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M}') & \xrightarrow{h_\theta} & \mathrm{Tor}_{k}^{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{k+n}(\mathrm{P}, \mathrm{R}')} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_k(\mathrm{P}, \mathrm{R})} \\ \mathrm{H}_{k+n}(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}') & \xrightarrow{\mathrm{H}_{k+n}(1 \otimes \varphi)} & \mathrm{H}_k(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R}). \end{array}$$

б) *Следующая диаграмма, в которой* $\delta_\theta(\beta) = (-1)^{n(n-1)/2}\beta \circ \theta$, *коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^k(\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{R}, \mathrm{N})) & \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+n}(\mathrm{Homgr}_A(\varphi, 1))} & \mathrm{H}^{k+n}(\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{R}', \mathrm{N})) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^k(\mathrm{R}, \mathrm{N})} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{k+n}(\mathrm{R}', \mathrm{N})} \\ \mathrm{Ext}_A^k(\mathrm{M}, \mathrm{N}) & \xrightarrow{\delta_\theta} & \mathrm{Ext}_A^{k+n}(\mathrm{M}', \mathrm{N}). \end{array}$$

Пусть α: $\mathrm{L}(\mathrm{M}) \to \mathrm{R}$ – морфизм комплексов, для которого $a \circ \alpha = p_{\mathrm{M}}$, и пусть

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{L}_n(\mathrm{M}') & \longrightarrow & \mathrm{L}_{n-1}(\mathrm{M}') & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{L}_0(\mathrm{M}') & \longrightarrow & \mathrm{M}' \longrightarrow 0 \\ \downarrow{\scriptstyle u_n} & & \downarrow{\scriptstyle u_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle u_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ 0 \longrightarrow \mathrm{M} & \xrightarrow{f} & \mathrm{K}_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{K}_1 & \longrightarrow & \mathrm{M}' \longrightarrow 0 \end{array}$$

– коммутативная диаграмма; выберем гомоморфизм v_n: $\mathrm{L}_n(\mathrm{M}') \to \mathrm{L}_0(\mathrm{M})$, для которого $p_{\mathrm{M}} \circ v_n = (-1)^n u_n$; согласно предложение 1, а), с. 54, v_n продолжается до морфизма комплексов v: $\mathrm{L}(\mathrm{M}') \to \mathrm{L}(\mathrm{M})(-n)$ и $(-1)^{n(n-1)/2}\theta$ есть образ при каноническом изоморфизме $\mathrm{H}^n(\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{L}(\mathrm{M}'), \mathrm{L}(\mathrm{M}) \to \mathrm{Ext}_A^n(\mathrm{M}', \mathrm{M})$ класса v (с. 124, замечание 1). Определим морфизм комплексов β: $\mathrm{L}(\mathrm{M}') \to \mathrm{R}'$, положив $\beta_p = u_p$ при $p \leqslant n-1$, $\beta_p = \alpha_{p-n} \circ v_p$ при $p \geqslant n$; имеем:

$$\varphi \circ \beta = \alpha(-n) \circ v.$$

С другой стороны, по определению отображений φ и ψ, имеем:

$$\psi_k(\mathrm{P}, \mathrm{R}) = \mathrm{H}_k(p_{\mathrm{P}} \otimes \alpha), \qquad \varphi^k(\mathrm{R}, \mathrm{N}) = \mathrm{H}^k(\mathrm{Homgr}_A(\alpha, e_{\mathrm{N}})),$$

$$\psi_{k+n}(\mathrm{P}, \mathrm{R}') = \mathrm{H}_{k+n}(p_{\mathrm{P}} \otimes \beta), \qquad \varphi^{k+n}(\mathrm{R}', \mathrm{N}) = \mathrm{H}^{k+n}(\mathrm{Homgr}_A(\beta, e_{\mathrm{N}})).$$

Наконец, по определению композиционного произведения имеем:

$$h_\theta = \mathrm{H}(p_{\mathrm{P}}, 1_{\mathrm{L}(\mathrm{M})(-n)})^{-1} \circ \mathrm{H}(1_{\mathrm{P}} \otimes v) \circ \mathrm{H}(p_{\mathrm{P}}, 1_{\mathrm{L}(\mathrm{M}')}),$$

$$\delta_\theta = \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(v, 1_{\mathrm{I}(\mathrm{N})})).$$

Следовательно, имеем равенства:

$$\psi_k(\mathrm{P}, \mathrm{R}) \circ h_\theta = \mathrm{H}_k(p_{\mathrm{P}} \otimes \alpha) \circ \mathrm{H}_k(p_{\mathrm{P}} \otimes 1)^{-1} \circ \mathrm{H}_k(1_{\mathrm{P}}, v) \circ \mathrm{H}_{k+n}(p_{\mathrm{P}}, 1) =$$

$$= \mathrm{H}_k(1_{\mathrm{P}} \otimes (\alpha \circ v)) \circ \mathrm{H}_{k+n}(p_{\mathrm{P}}, 1) = \mathrm{H}_{k+n}(1_{\mathrm{P}} \otimes (\varphi \circ \beta)) \circ \mathrm{H}_{k+n}(p_{\mathrm{P}}, 1) =$$

$$= \mathrm{H}_{k+n}(p_{\mathrm{P}} \otimes (\varphi \circ \beta)) = \mathrm{H}_{k+n}(1 \otimes \varphi) \circ \mathrm{H}_{k+p}(p_{\mathrm{P}} \circ \beta) = \mathrm{H}_{k+n}(1 \otimes \varphi) \circ \psi_{k+n}(\mathrm{P}, \mathrm{R}'),$$

откуда следует утверждение а); доказательство утверждения б) аналогично.

Замечание. С помощью изоморфизмов коммутирования из а) выводится аналогичное утверждение в случае точной последовательности (16) *правых* A-модулей.

Пусть теперь b: $\mathrm{M}' \to \mathrm{E}'$ – правая резольвента для M'; имеем, таким образом, точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{M}' \xrightarrow{b^0} \mathrm{E}'^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{E}'^1 \to \dots \to \mathrm{E}'^k \xrightarrow{\delta^k} \mathrm{E}'^{k+1} \to \dots,$$

из которой получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{K}_n \to \mathrm{K}_{n-1} \to \dots \to \mathrm{K}_1 \xrightarrow{(-1)^n b^0 \circ g} \mathrm{E}'^0 \xrightarrow{(-1)^n \delta^0} \mathrm{E}'^1 \to \dots,$$

соответствующую правой резольвенте E для M; обозначим через σ: $\mathrm{E}'(n) \to \mathrm{E}$ морфизм, для которого $\sigma^k = 1_{\mathrm{E}'^{k-n}}$ при $k \geqslant n$. Имеем, следовательно, гомоморфизм

$$\mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(1_{\mathrm{N}}, \sigma))\colon \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{N}, \mathrm{E}'))(n) \to \mathrm{H}(\mathrm{Homgr}_A(\mathrm{N}, \mathrm{E})).$$

Предложение 9. *Следующая диаграмма, в которой* $\gamma_\theta(\alpha) = (-1)^{n(n-1)/2}\theta \circ \alpha$, *коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} H^k(\mathrm{Homgr}_A(N, E')) & \xrightarrow{H^{k+n}(\mathrm{Homgr}_A(1_N, \sigma))} & H^{k+n}(\mathrm{Homgr}_A(N, E)) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^k(N, E')} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{k+n}(N, E)} \\ \mathrm{Ext}_A^k(N, M') & \xrightarrow{\gamma_\theta} & \mathrm{Ext}_A^{k+n}(N, M). \end{array}$$

Это доказывается аналогично предложению 8.

Упражнения

1. Пусть k – коммутативное кольцо, A – унитарная ассоциативная k-алгебра, M – (A, A)-бимодуль. *Расширением алгебры* A *посредством* M называется задание унитарной ассоциативной k-алгебры B и точной последовательности

$$(\&)\quad 0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0,$$

где p – гомоморфизм алгебр и где

$$i(p(b)m) = bi(m) \quad \text{и} \quad i(mp(b)) = i(m)b \quad \text{для} \quad b \in B,\ m \in M.$$

Два расширения $0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ и $0 \to M \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} A \to 0$ называются *эквивалентными*, если существует гомоморфизм алгебр u: B → B', для которого $p' \circ u = p$ и $u \circ i = u'$; такой гомоморфизм u всегда биективен.

а) Предположим, что точная последовательность k-модулей $0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ *расщепляема*; пусть s: A → B – k-линейное сечение отображения p. Показать, что существует элемент $f \in C^2(A, M)$ (с. 119, упражнение 26, б)), для которого $s(a)s(a') - s(aa') = i(f(a, a'))$ для $a, a' \in A$. Показать, что f – 2-коцикл и что его класс в $H^2(A, M)$ не зависит от выбора s; он обозначается через $c(\&)$.

б) Пусть $\mathrm{Ex}_k(A, M)$ – множество классов эквивалентности расширений алгебры A посредством M, которые тривиальны как расширения k-модулей. Показать, что c определяет биекцию множества $\mathrm{Ex}_k(A, M)$ на $H^2(A, M)$.

в) Пусть $(\&)$: $0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ и $(\&')$: $0 \to M \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} A \to 0$ – два расширения алгебры A посредством M. Обозначим через C подалгебру в $B \times B'$, образованную элементами (b, b'), для которых $p(b) = p'(b')$; пусть $\mathfrak{C}$ – идеал в C, образованный элементами $(i(m), -i'(m))$, где $m \in M$, B'' – алгебра $C/\mathfrak{C}$, π: C → B'' – гомоморфизм перехода к факторалгебре. Пусть i'': M → B'' и p'': B'' → A – гомоморфизмы, при которых $i''(m) = \pi((m, 0))$ для $m \in M$ и $p''\pi((b, b')) = p(b)$ для $b \in B$, $b' \in B'$. Показать, что последовательность $0 \to M \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{p''} A \to 0$ представляет собой расширение алгебры A посредством M, называемое суммой расширений $(\&)$ и $(\&')$, и что таким способом определяется закон коммутативной группы на множестве классов эквивалентности расширений алгебры A посредством M. В частности, множество $\mathrm{Ex}_k(A, M)$ наделяется при этом структурой группы, и отображение c оказывается изоморфизмом групп.

2. Предположим, что k-алгебра A обладает *пополнением* π: A → k (с. 120, упражнение 27) и что, кроме того, A – проективный k-модуль. Обозначим через I ядро π. Пусть M – левый A-модуль.

а) Пусть $(\&)$: $0 \to M_{(\pi)} \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ – расширение алгебры A посредством (A, A)-бимодуля B (с. 120, упражнение 27); обозначим через $\overline{B}$ идеал в B, образованный элементами $b \in B$, для которых $p(b) \in I$. Имеем $i(m)b = 0$ для $m \in M$ и $b \in \overline{B}$, так что $\overline{B}$ наделяется структурой левого A-модуля, относительно которой $p(\beta)b = \beta b$ для $\beta \in B$, $b \in \overline{B}$. Показать, что существует точная последовательность A-модулей $0 \to M \to \overline{B} \to I \to 0$; обозначим через $\theta(\&)$ класс этой точной последовательности в $\mathrm{Ext}_A^1(I, M)$.

б) Показать, что θ определяет отображение множества $\mathrm{Ex}_k(A, M_{(\pi)})$ в $\mathrm{Ext}_A^1(I, M)$. Доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}_k(A, M_{(\pi)}) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Ext}_A^1(I, M) \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle -\delta} \\ H^2(A, M_{(\pi)}) & \xrightarrow{\varphi^2} & \mathrm{Ext}_A^2(k, M), \end{array}$$

где δ – связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности $0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} k \to 0$,

а φ^2 — изоморфизм, получаемый из вычисления с помощью стандартной резольвенты (с. 120, упражнение 27, б)). Вывести отсюда, что θ — изоморфизм групп.

3. Пусть G — группа, A — алгебра $\mathbf{Z}^{(G)}$, j: G → A — каноническое вложение. Наделим алгебру A пополнением π: A → Z, определяемым условием: $\pi(e_g) = 1$ для всякого $g \in G$. Пусть M — левый A-модуль.

а) Пусть $0 \to M_{(\pi)} \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0$ — расширение алгебры A посредством (A, A)-бимодуля $M_{(\pi)}$ (с. 120, упражнение 27). Обозначим через Γ подмножество в B, образованное элементами $b \in B$, для которых $p(b) \in j(G)$. Показать, что множество Γ, наделенное умножением, индуцированным умножением в B, представляет собой группу, являющуюся расширением группы G посредством G-модуля M.

б) Предыдущее построение определяет отображение группы $\mathrm{Ex}_Z(A, M_{(\pi)})$ в Ex(G, M) (VIII, §13). Показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}_Z(A, M_{(\pi)}) & \longrightarrow & \mathrm{Ex}(G, M) \\ \downarrow c & & \downarrow \\ H^2(A, M_{(\pi)}) & \xrightarrow{\varphi^2} & H^2(G, M) \end{array}$$

коммутативна.

* 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — k-алгебра Ли, M — $\mathfrak{g}$-модуль. *Расширением* $\mathfrak{g}$ *посредством* M называется точная последовательность k-модулей $0 \to M \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0$, где $\mathfrak{h}$ — k-алгебра Ли, p — гомоморфизм алгебр Ли и $i(p(H)m) = [H, i(m)]$ для $H \in \mathfrak{h}$, $m \in M$. Два расширения.

$$0 \to M \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0, \quad 0 \to M \xrightarrow{i'} \mathfrak{h}' \xrightarrow{p'} \mathfrak{g} \to 0$$

называются эквивалентными, если существует гомоморфизм u: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$, для которого $p' \circ u = p$, $u \circ i = i'$. Обозначим через Liex($\mathfrak{g}$, M) множество классов эквивалентности расширений $\mathfrak{g}$ посредством M. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль.

а) Пусть (&): $0 \to M \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0$ — некоторое расширение $\mathfrak{g}$ посредством M; выберем k-линейное сечение s: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ для отображения p. Определим элемент $f \in C^2(\mathfrak{g}, M)$ (с. 121, упражнение 28, б)), положив

$$i(f(x, y)) = [s(x).s(y)] - s([x, y]) \quad \text{для} \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Показать, что f есть 2-коцикл и что его класс в $H^2(\mathfrak{g}, M)$ не зависит от выбора s; он обозначается через γ(&).

б) Показать, что γ определяет биекцию множества Liex($\mathfrak{g}$, M) на $H^2(\mathfrak{g}, M)$. Дать прямое описание структуры группы на Liex($\mathfrak{g}$, M), получаемой переносом структуры на $H^2(\mathfrak{g}, M)$ посредством γ.

в) Пусть U — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, j: $\mathfrak{g} \to U$ — каноническое вложение, $M_{(\pi)}$ — (U, U)-бимодуль, ассоциированный с M с помощью пополнения π: U → k, определяемого условием: $\pi(j(x)) = 0$ для всякого $x \in \mathfrak{g}$ (с. 120, упражнение 27). Пусть $0 \to M_{(\pi)} \to B \xrightarrow{p} U \to 0$ — некоторое расширение алгебры U посредством $M_{(\pi)}$ (упражнение 1); обозначим через $\mathfrak{h}$ множество элементов $b \in B$, для которых $p(b) \in j(\mathfrak{g})$. Показать, что $\mathfrak{h}$ — k-алгебра Ли, являющаяся расширением $\mathfrak{g}$ посредством M. Эта конструкция определяет отображение λ: $\mathrm{Ex}_k(U, M_{(\pi)}) \to \mathrm{Liex}(\mathfrak{g}, M)$. Показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}_k(U, M_{(\pi)}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Liex}(\mathfrak{g}, M) \\ \downarrow c & & \downarrow \gamma \\ H^2(U, M_{(\pi)}) & \xrightarrow{\varphi^2} & H^2(\mathfrak{g}, M) \end{array}$$

(где φ^2 — изоморфизм, определенный в упражнение 27, с. 120), коммутативна. Вывести отсюда, что λ — изоморфизм. *

¶ 5. Пусть F, G — две группы.

а) Для всякого расширения &: F → E → G группы G посредством F (I, p. 62) действие E на F посредством внутренних автоморфизмов определяет гомоморфизм E → Aut(F), откуда путем перехода к факторгруппам получаем гомоморфизм групп ∂: G → Aut(F)/Int(F), называемый гомоморфизмом, ассоциированным с расширением (&). Два изоморфных расширения G посредством F имеют один и тот же ассоциированный гомоморфизм.

б) Обратно, рассмотрим гомоморфизм групп θ: G → Aut(F)/Int(F). Обозначим через

$$p\colon \mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$$

отображение перехода к факторгруппе. Выберем отображение σ из G в Aut(F), для которого $p \circ \sigma = \theta$, и отображение f из G × G в Int(F), для которого $\sigma(x)\sigma(y)(\sigma(xy))^{-1} = \mathrm{Int}(f(x, y))$ для

$x, y \in G$; положим

$$c(x, y, z) = \sigma(x)(f(y, z)) \cdot f(x, yz) \cdot (f(xy, z))^{-1} \cdot (f(x, y))^{-1}.$$

Показать, что $c(x, y, z)$ принадлежит центру Z группы F.

в) Будем рассматривать группу Z как G-модуль, положив $g \cdot z = \sigma(g)(z)$ для $g \in G, z \in Z$; это определение не зависит от выбора σ. Отображение c определяет элемент из $C^3(G, Z)$; показать, что c есть 3-коцикл и что его класс в $H^3(G, Z)$ не зависит от выбора σ и f. Он обозначается через $\omega(G, F, \theta)$.

г) Показать, что обращение в нуль класса $\omega(G, F, \theta)$ представляет собой необходимое и достаточное условие для существования расширения группы G посредством F, имеющего θ в качестве ассоциированного гомоморфизма (если $\omega(G, F, \theta) = 0$, то показать, что можно выбрать f так, чтобы коцикл c был нулевой, затем определить групповой закон на $G \times F$).

д) Предположим, что $\omega(G, F, \theta) = 0$. Показать, что множество классов относительно изоморфизма расширений группы G посредством F с ассоциированным гомоморфизмом θ представляет собой главное однородное множество над группой $H^2(G, Z)$.

е) Пусть H – группа, M – $Z^{(H)}$-модуль, x – элемент из $H^3(H, M)$. Показать, что существуют группа E с центром M и гомоморфизм $\varphi: H \to \mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Int}(E)$, индуцирующий на M заданную структуру H-модуля, для которых $\omega(H, E, \varphi) = x$ (взять $E = M \times L$, где L – свободная группа, построенная на $H \times H$).

6. Пусть M – правый A-модуль, N – левый A-модуль. Для $n \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{T}_n(M, N)$ множество троек (P, p, q), где P – комплекс свободных A-модулей конечного типа, в котором $P_r = 0$ при $r < 0$ и $r > n$, и где $p: P \to N$ и $q: P^* \to M(n)$ – морфизмы A-комплексов (через P^* обозначается комплекс $\mathrm{Homgr}_A(P, A)$). Два элемента (P, p, q) и (P', p', q') из $\mathcal{T}_n(M, N)$ называются *связанными*, если существует морфизм $u: P \to P'$, для которого $p = p' \circ u$ и $q' = q \circ {}^t u$; обозначим через $T_n(M, N)$ фактормножество множества $\mathcal{T}_n(M, N)$ по самому тонкому отношению эквивалентности, для которого два связанных элемента эквивалентны (ср. II, p. 52, exercice 9).

а) Показать, что $T_n(M, N)$ отождествляется с $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$.

б) Пусть $(\&): 0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ – точная последовательность правых A-модулей. Описать связывающий гомоморфизм $\partial: T_n(M'', N) \to T_{n-1}(M', N)$, получаемый из $\partial(\&, N)$ с помощью предыдущих отождествлений.

(Если $(P, p, q) \in \mathcal{T}_n(M'', N)$, то показать, что $\partial(P, p, q) = (\bar{P}, \bar{p}, \bar{q})$, где $\bar{P}$ – комплекс, получаемый заменой P_n на 0 в P, $\bar{p}$ – морфизм, получаемый из p, и гомоморфизм $(\bar{q})^{n-1}: P_{n-1}^* \to M'$ равен u^{n-1}, где u – морфизм из P^* в комплекс $(\mathrm{Con}(i))(n)$, для которого $\pi \circ u^n = q^n$.)

¶ 7. Пусть A' – k-алгебра (ассоциативная и унитарная и $B = A \otimes_k A'$.

а) Пусть M – левый A-модуль, Q – правый A-модуль, M' – левый A'-модуль, Q'-правый A'-модуль. Пусть (P, p) (соответственно (P', p')), соответственно (R, r)) – проективная резольвента A-модуля M (соответственно A'-модуля M', соответственно B-модуля $M \otimes_k M'$). Показать, что существует единственный с точностью до гомотопии морфизм B-комплексов

$$u: P \otimes_k P' \to R,$$

для которого $r \circ u = p \otimes p'$. Определить с помощью u градуированный k-гомоморфизм степени 0

$$T: \mathrm{Tor}_A(Q, M) \otimes_k \mathrm{Tor}_{A'}(Q', M') \to \mathrm{Tor}_B(Q \otimes_k Q', M \otimes_k M').$$

Показать, что T не зависит от выбора резольвент P, P', R и морфизма u. Если $a \in \mathrm{Tor}_A(Q, M)$ и $a' \in \mathrm{Tor}_{A'}(Q', M')$ то положим $T(a \otimes a') = a \mathrel{T} a'$.

б) Предположим дополнительно, что k-модули A и A' *проективны* и что $\mathrm{Tor}_n^k(M, M') = 0$ при $n > 0$. Показать, что тогда $P \otimes_k P'$ представляет собой проективную резольвенту B-модуля $M \otimes_k M'$, получить отсюда для всякого A-модуля N и всякого A'-модуля N' градуированный k-гомоморфизм степени 0

$$V: \mathrm{Ext}_A(M, N) \otimes_k \mathrm{Ext}_{A'}(M', N') \to \mathrm{Ext}_B(M \otimes_k M', N \otimes_{k'} N').$$

Показать, что V не зависит от выбора резольвент P и P'. Если $b \in \mathrm{Ext}_A(M, N)$ и $b' \in \mathrm{Ext}_{A'}(M', N')$, то обозначим $V(b \otimes b') = b \vee b'$.

в) Пусть A'' – третья k-алгебра (ассоциативная и унитарная), M'' и N'' – левые A''-модули, Q'' – правый A''-модуль. Отождествим между собой k-алгебры $A \otimes_k (A' \otimes_k A'')$ и $(A \otimes_k A') \otimes_k A''$, так же как и k-модули $M \otimes_k (M' \otimes_k M'')$ и $(M \otimes_k M') \otimes_k M''$, $N \otimes_k (N' \otimes_k N'')$ и $(N \otimes_k N') \otimes_k N''$), $(Q \otimes_k (Q' \otimes_k Q'')$ и $(Q \otimes_k Q') \otimes_k Q''$. Доказать формулы:

$$a \mathrel{T} (a' \mathrel{T} a'') = (a \mathrel{T} a') \mathrel{T} a''$$

для $a \in \mathrm{Tor}_A(Q, M)$, $a' \in \mathrm{Tor}_{A'}(Q', M')$, $a'' \in \mathrm{Tor}_{A''}(Q'', M'')$;

$$b \vee (b' \vee b'') = (b \vee b') \vee b''$$

для $b \in \mathrm{Ext}_A(M, N)$, $b' \in \mathrm{Ext}_{A'}(M', N')$, $b'' \in \mathrm{Ext}_{A''}(M'', N'')$.

г) Пусть

$$\sigma\colon \mathrm{Tor}^{A \otimes_k A'}(Q \otimes_k Q', M \otimes_k M') \to \mathrm{Tor}^{A' \otimes_k A}(Q \otimes_k Q, M' \otimes_k M)$$

и

$$\tau\colon \mathrm{Ext}_{A \otimes_k A'}(M \otimes_k M', N \otimes_k N') \to \mathrm{Ext}_{A' \otimes_k A}(M \otimes_k M, N' \otimes_k N)$$

– изоморфизмы, получаемые из изоморфизмов коммутирования

$$A \otimes_k A' \to A' \otimes_k A, \quad M \otimes_k M' \to M' \otimes_k M, \quad N \otimes_k N' \to N' \otimes_k N, \quad Q \otimes_k Q' \to Q' \otimes_k Q.$$

Доказать формулы:

$$\sigma(a \top a') = (-1)^{pq} a' \top a \quad \text{для} \quad a \in \mathrm{Tor}^A_p(Q, M), \quad a' \in \mathrm{Tor}^A_q(Q', M');$$

$$\tau(b \vee b') = (-1)^{pq} b' \vee b \quad \text{для} \quad b \in \mathrm{Ext}^p_A(M, N), \quad b' \in \mathrm{Ext}^q_{A'}(M', N').$$

д) Пусть $(\&)\colon 0 \to M_2 \to M_1 \to M_0 \to 0$ – точная последовательность A-модулей, для которой последовательность $(\& \otimes M')\colon 0 \to M_2 \otimes_k M' \to M_1 \otimes_k M' \to M_0 \otimes_k M' \to 0$ тоже точная. Обозначим через δ (соответственно Δ) связывающий гомоморфизм $\partial(Q, \&)$ (соответственно $\partial(Q \otimes_k Q', \& \otimes M')$). Показать, что $(\delta a) \top a' = \Delta(a \top a')$ для $a \in \mathrm{Tor}^A(Q, M_0)$, $a' \in \mathrm{Tor}^A(Q', M')$. Доказать аналогичную формулу для произведения $\vee$.

е) Если k – поле, показать, что $\top$ представляет собой изоморфизм градуированных k-модулей; то же самое справедливо для $\vee$, если, кроме того, алгебры A и A′ нётеровы слева и если A-модуль M и A′-модуль M′ имеют конечный тип.

ж) Отождествив модули $\mathrm{Tor}^A_n(Q, M)$ с множествами $T_n(Q, M)$, определенными в упражнении 6, доказать формулу: $(P, p, q) \top (P', p', q') = (P \otimes_k P', p \otimes p', q \otimes q')$.

8. Сохраняем обозначения из упражнения 7; предполагаем, что k-модули A и A′ проективны.

а) Предположим, что $\mathrm{Tor}^k_i(M, M') = 0$ при $i > 0$. Показать, что отображение $b \mapsto b \vee 1_{M'}$ определяет градуированный k-гомоморфизм степени нуль из $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ в $\mathrm{Ext}_B(M \otimes_k M', N \otimes_k M')$, который индуцирует в степени нуль канонический гомоморфизм $b \to b \otimes 1_{M'}$.

б) Предположим, что k-модуль M′ плоский. Пусть

$$0 \to N \to R_n \to \ldots \to R_1 \to M \to 0$$

– точная последовательность A-модулей с классом $b \in \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$. Показать, что точная последовательность B-модулей

$$0 \to N \otimes_k M' \to R_n \otimes_k M' \to \ldots \to R_1 \otimes_k M' \to M \otimes_k M' \to 0$$

имеет в качестве класса элемент $b \vee 1_{M'} \in \mathrm{Ext}^n_B(M \otimes_k M', N \otimes_k M')$.

в) Предположим, что k-модули M, M′, N, N′ плоские. Показать, что

$$b \vee b' = (b \vee 1_{N'}) \circ (1_M \vee b') = (-1)^{pq}(1_N \vee b') \circ (b \vee 1_{M'})$$

для $b \in \mathrm{Ext}^p_A(M, N)$, $b' \in \mathrm{Ext}^q_{A'}(M', N')$.

9. Предположим, что кольцо A коммутативно. Пусть B, C – две унитарные ассоциативные A-алгебры; обозначим через m_B: $B \otimes_A B \to B$ умножение в B и через m_C – умножение в C.

а) Показать, что гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}(m_B, m_C) \circ \top\colon \mathrm{Tor}^A(B, C) \otimes_A \mathrm{Tor}^A(B, C) \to \mathrm{Tor}^A(B, C).$$

(см. упражнение 7) определяет на $\mathrm{Tor}^A(B, C)$ структуру унитарной ассоциативной градуированной A-алгебры.

б) Пусть S – градуированная дифференциальная A-алгебра и p: $S_0 \to B$ – гомоморфизм A-алгебр, причем (S, p) представляет собой свободную резольвенту для B (см. с. 69, упражнение 18). Показать, что изоморфизм

$$\psi(S, C)\colon \mathrm{Tor}^A(B, C) \to H(S \otimes_A C)$$

является *изоморфизмом A-алгебр*, если $H(S \otimes_A C)$ наделить структурой алгебры, получаемой из структуры градуированной дифференциальной алгебры на $S \otimes_A C$ (с. 69, упражнение 18, б) и в)).

в) Если A-алгебры B и C коммутативны, доказать, что градуированная алгебра $\mathrm{Tor}^A(B, C)$ *косокоммутативна* (ср. с. 69, упражнение 19).

10. Пусть B – *k-бигебра* (III, р. 148), которая рассматривается как пополненная k-алгебра (с. 120, упражнение 27) с помощью коединицы γ: $B \to k$; предположим, что k-модуль B проективен.

а) Пусть M, N – два левых A-модуля. Гомоморфизм $\vee$ из упражнения 7 отождествим с градуированным гомоморфизмом степени нуль

$$H(B, \gamma; M) \otimes_k H(B, \gamma; N) \to H(B \otimes_k B, \gamma \otimes \gamma; M \otimes_k N);$$

посредством композиции с гомоморфизмом, получаемым из коумножения, получить отсюда градуированный гомоморфизм степени нуль

$$\smile: H^*(B, \gamma; M) \otimes_k H^*(B, \gamma; N) \to H^*(B, \gamma; M \otimes_k N).$$

б) Пусть C – унитарная ассоциативная k-алгебра, которую наделим структурой B-модуля, получаемой из γ.

Показать, что гомоморфизм $\smile$ определяет на $H^*(B, \gamma; C)$ структуру унитарной ассоциативной градуированной k-алгебры; если алгебра C коммутативна и если бигебра B коммутативна, то алгебра $H^*(B, \gamma; C)$ кокоммутативна.

в) Возьмем $C = k$. Показать, что произведение $\smile$ совпадает с композиционным произведением на $\mathrm{Ext}_B(k, k)$.

г) Пусть G – группа, M и N – два $Z^{(G)}$-модуля. Наделим $M \otimes_Z N$ структурой $Z^{(G)}$-модуля, определяемой условием: $g(x \otimes y) = gx \otimes gy$ для $g \in G$, $x \in M$, $y \in N$. Показать, что отображение

$$\smile: H^*(G, M) \otimes_Z H^*(G, N) \to H^*(G, M \otimes_Z N)$$

представляет собой гомоморфизм, индуцируемый на гомологии градуированным гомоморфизмом степени нуль

$$u: C^*(G, M) \otimes_Z C^*(G, N) \to C^*(G, M \otimes_Z N),$$

определяемым по формуле: $u(f \otimes h)(g_1, \ldots, g_{p+q}) = f(g_1, \ldots, g_p) \otimes g_1 \ldots g_p h(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q})$ для $f \in C^p(G, M)$, $h \in C^q(G, N)$, $g_1, \ldots, g_{p+q} \in G$.

(Использовать упражнение 5, с. 86.)

¶11. Предположим, что бигебра B обладает *обращением* (см. III, p. 198, exercice 4). Пусть M и N – B-модули. k-модуль $M \otimes_k N$ (соответственно $\mathrm{Hom}_k(M, N)$) имеет естественную структуру $B \otimes_k$ B-модуля (соответственно $B \otimes_k B^\circ$-модуля); наделим его структурой B-модуля, получаемой из коумножения c (соответственно $(1_B \otimes i) \circ c$).

а) Показать, что гомоморфизм $\smile$ (упражнение 10) определяет градуированный гомоморфизм степени нуль

$$\smile: H^*(B, \gamma; \mathrm{Hom}_k(M, N)) \otimes_k H^*(B, \gamma; M) \to H^*(B, \gamma; N).$$

б) Пусть $0 \to M \to R_n \to \ldots \to R_1 \to k \to 0$ – точная последовательность B-модулей, в которой модули R_i проективны ($1 \leqslant i \leqslant n$); пусть θ – ее класс в $\mathrm{Ext}_B^n(k, M) = H^n(B, \gamma; M)$.

Показать, что для $p \geqslant 1$ отображение $x \mapsto x \smile \theta$ определяет *k-изоморфизм* модуля $H^p(B, \gamma; \mathrm{Hom}_k(M, N))$ на $H^{p+n}(B, \gamma; N)$.

(Доказать, что это отображение разлагается в композицию

$$H^p(B, \gamma; \mathrm{Hom}_k(M, N)) \to \mathrm{Ext}_B^p(M, N) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Ext}_B^{p+n}(k, N).)$$

в) Пусть G – группа, $N = Z^{(G)}$-модуль. Пусть F – свободная группа, p: $F \to G$ – сюръективный гомоморфизм, $R = \mathrm{Ker}(p)$, $\bar{R} = R/(R, R)$, $\bar{F} = F/(R, R)$. Расширение $\bar{R} \to \bar{F} \to G$ определяет класс $\epsilon \in H^2(G, \bar{R})$; доказать, что отображение $x \mapsto x \smile \epsilon$ из $H^p(G, \mathrm{Hom}_Z(\bar{R}, N))$ в $H^{p+2}(G, N)$ является изоморфизмом при $p \geqslant 1$ (использовать упражнение 3, г), с. 65).

§ 8. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

В этом параграфе сохраняются соглашения из § 5.

1. Проективная размерность модуля

Определение 1. Пусть M – A-модуль. *Проективной размерностью* модуля M называется нижняя грань в $\bar{Z}$ длин его проективных резольвент (с. 54); она обозначается через $\mathrm{dp}_A(M)$.

Таким образом, $\mathrm{dp}_A(0) = -\infty$, $\mathrm{dp}_A(M) \geqslant 0$, если $M \neq 0$. Для того чтобы модуль M был проективен, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant 0$.

Лемма 1. *Если* $\mathrm{dp}_A(M) < n < +\infty$, *то* $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля* N *и* $\mathrm{Tor}_n^A(P, M) = 0$ *для всякого правого* A-*модуля* P.

Этот тотчас следует из того факта, что M обладает проективной резольвентой длины $< n$, и из теоремы 1, с. 103.

Предложение 1. *Пусть* M – A-*модуль и* n – *целое число* $\geqslant 0$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$ (*т.е., по определению* 1, M *обладает проективной резольвентой длины* $\leqslant n$);

(ii) $\mathrm{Ext}_A^r(M, N) = 0$ *для всякого* A*-модуля* N *и всякого целого числа* $r > n$;

(iii) $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ *для всякого* A*-модуля* N;

(iv) *для всякой точной последовательности*

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0,$$

в которой модули P_i *проективны, модуль* K *проективен.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): это следует из леммы 1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): это тривиально.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): в ситуации, описанной в (iv) для всякого A-модуля N имеем изоморфизм $\mathrm{Ext}_A^1(K, N)$ на $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N)$ (с. 132, следствие 4); если условие (iii) выполняется, то

$$\mathrm{Ext}_A^1(K, N) = 0$$

для всякого N и, следовательно, модуль K проективен (с. 97. предложение 10)

(iv) $\Rightarrow$ (i): рассмотрим точную последовательность (с. 56)

$$0 \to Z_{n-1}(M) \to L_{n-1}(M) \to \ldots \to L_0(M) \to 0.$$

Если (iv) выполняется, то модуль $Z_{n-1}(M)$ проективен и M обладает проективной резольвентой длины $\leqslant n$.

Следствие 1. *Пусть* $(M_i)_{i \in E}$ *– семейство* A*-модулей. Имеем*

$$\mathrm{dp}_A\Big(\bigoplus_{i \in E} M_i\Big) = \sup_{i \in E} \mathrm{dp}_A(M_i).$$

Это следует из эквивалентности условий (i) и (iii) предложения 1 и из предложения 7, с. 94.

В следующей формулировке принимается, что $\pm\infty + 1 = \pm\infty - 1 = \pm\infty$.

Следствие 2. *Пусть*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

– точная последовательность A*-модулей.*

а) *Имеем*:

$$\mathrm{dp}_A(M) \leqslant \sup(\mathrm{dp}_A(M'), \mathrm{dp}_A(M'')).$$

Если $\mathrm{dp}_A(M'') \neq \mathrm{dp}_A(M') + 1$, то имеет место равенство.

б) Имеем:

$$\mathrm{dp}_A(M'') \leqslant \sup(\mathrm{dp}_A(M), \mathrm{dp}_A(M') + 1).$$

Если $\mathrm{dp}_A(M) \neq \mathrm{dp}_A(M')$, то имеет место равенство.

в) Имеем

$$\mathrm{dp}_A(M') \leqslant \sup(\mathrm{dp}_A(M), \mathrm{dp}_A(M'') - 1).$$

Если $\mathrm{dp}_A(M) \neq \mathrm{dp}_A(M'')$, *то имеет место равенство.*

Докажем, например, а), поскольку доказательства утверждений б) и в) аналогичны.

Если N – произвольный A-модуль и n – целое число $\geqslant 0$, то имеем точную последовательность

$$\mathrm{Ext}_A^n(M', N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M', N) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^{n+2}(M'', N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+2}(M, N).$$

Если $\mathrm{dp}_A(M')$, $\mathrm{dp}_A(M'') \leqslant n$, то $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M', N) = 0$ и $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N) = 0$ (предложение 1), следовательно $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ и $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$ (предложение 1), так что

$$\mathrm{dp}_A(M) \leqslant \sup(\mathrm{dp}_A(M'), \mathrm{dp}_A(M'')).$$

Если $\mathrm{dp}_A(M) < \sup(\mathrm{dp}_A(M'), \mathrm{dp}_A(M''))$, то $\mathrm{dp}_A(M) < +\infty$. Для всякого $n \geqslant \mathrm{dp}_A(M)$

и всякого A-модуля N имеем: $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'', N) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}_A^n(M', N) \neq 0$ и

$$\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M', N) \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}_A^{n+2}(M'', N) \neq 0,$$

согласно предыдущей точной последовательности; согласно предложению 1, отсюда немедленно следует, что $\mathrm{dp}_A(M'') = \mathrm{dp}_A(M') + 1$, так как одна из величин $\mathrm{dp}_A(M'), \mathrm{dp}_A(M'') > \mathrm{dp}_A(M)$.

Пример. Пусть a – элемент из A, который не является ни обратимым справа, ни правым делителем нуля. Тогда $\mathrm{dp}_A(A/Aa) = 1$.

Действительно, согласно точной последовательности $0 \to A_s \xrightarrow{\varphi} A_s \to A/Aa \to 0$, где $\varphi(x) = xa$, имеем: $\mathrm{dp}_A(A/Aa) \leqslant 1$. Если $\mathrm{dp}_A(A/Aa) < 1$, то модуль A/Aa проективен и существует A-линейное отображение ψ: $A_s \to A_s$, для которого $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$; отсюда следует, что

$$1 = \psi(\varphi(1)) = \psi(a) = a \cdot \psi(1),$$

и a обратим справа.

Предложение 2. *Предположим, что кольцо* A *нётерово слева. Пусть* M – A-*модуль конечного типа и* n – *целое число* $\geqslant 0$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$.

(ibis) M *обладает проективной резольвентой* P *длины* $\leqslant n$, *в которой* P_i – A-*модуль конечного типа для каждого* i.

(ii) $\mathrm{Ext}_A^r(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля конечного типа* N *и всякого* $r > n$.

(iii) $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ *для всякого* A-*модуля конечного типа* N.

(iv) $\mathrm{Tor}_r^A(P, M) = 0$ *для всякого правого* A-*модуля* P *и всякого* $r > n$.

(v) $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ *для всякого правого идеала конечного типа* $\mathfrak{a}$ *в* A.

(ibis) $\Rightarrow$ (i): это тривиально.

(i) $\Rightarrow$ (ii): это следует из леммы 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i): согласно (iii) и предложению 5, с. 108, имеем: $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ для всякого A-модуля N, и, следовательно, справедливо (i) согласно предложению 1.

(i) $\Rightarrow$ (iv): это следует из леммы 1.

(iv) $\Rightarrow$ (v): это тривиально.

(v) $\Rightarrow$ (ibis): пусть (L, d) – свободная резольвента модуля M, в которой L_r – модуль конечного типа для всякого r (с. 59, предложение 6). Положим $K = Z_{n-1}(L)$, тогда K имеет конечный тип как подмодуль в L_{n-1}, и получаем точную последовательность

$$0 \to K \to L_{n-1} \to L_{n-2} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0. \qquad (1)$$

Согласно (v) и следствию 3, с. 136, имеем $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, K) = 0$ для всякого правого идеала конечного типа $\mathfrak{a}$ в A. Согласно теореме 2, с. 81, A-модуль K плоский; так как он конечного типа и, следовательно, конечно представим (с. 14, предложение 5), то он проективен (с. 17, следствие), следовательно, (1) представляет собой проективную резольвенту для M.

Следствие. *Предположим, что кольцо* A *нётерово слева, и пусть* $\mathscr{C}_0$ (*соответственно* $\mathscr{C}$) – *множество классов проективных* A-*модулей конечного типа* (*соответственно* A-*модулей конечной проективной размерности и конечного типа*). *Тогда гомоморфизм групп Гротендика* $K(\mathscr{C}_0) \to K(\mathscr{C})$ *биективен.*

Это следует из теоремы 1, с. 63 (отметим, что множества $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}$ точные слева согласно следствию 2).

2. Гомоморфизм $\mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P)$

Пусть M – левый A-модуль, P – правый A-модуль, n – целое число $\geqslant 0$. k-билинейное отображение (с. 134)

$$c_{P;M,A_s}: \mathrm{Ext}_A^n(M, A) \times \mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to P \otimes_A A$$

соответствует некоторому k-линейному отображению

$$\mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P). \tag{2}$$

Кроме того, если k-модуль $\mathrm{Ext}_A^n(M, A)$ наделен структурой правого A-модуля, происходящей из структуры бимодуля на A, то, как легко проверяется, образ гомоморфизма (2) состоит из A-линейных отображений; отсюда получаем k-гомоморфизм, называемый *каноническим*

$$\mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P). \tag{3}$$

П р е д л о ж е н и е 3. а) *Если* $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$, *то канонический гомоморфизм* (3) *инъективен.*

б) *Если* $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$, *если кольцо* A *нётерово слева и если* M – *модуль конечного типа, то канонический гомоморфизм* (3) *биективен.*

Проводим индукцию по n. Если $n = 0$, то модуль M проективен, гомоморфизм (3) отождествляется с каноническим гомоморфизмом $P \otimes_A M \to \mathrm{Hom}_A(M^*, P)$ из II, p. 77, и предложение следует из II, p. 77, cor. Если $n > 0$, то пусть

$$0 \to N \to L \to M \to 0 \tag{4}$$

– точная последовательность A-модулей, где модуль L свободен (и конечного типа в случае б)); тогда $\mathrm{dp}_A N \leqslant n - 1$ (с. 143, следствие 2, в)) и N конечного типа в случае б).

Пусть $\theta \in \mathrm{Ext}_A^1(M, N)$ – класс, ассоциированный с точной последовательностью (4) (с. 124, определение 1). Обозначим через

$$u_n\colon \mathrm{Ext}_A^{n-1}(N, A) \to \mathrm{Ext}_A^n(M, A), \qquad v_n\colon \mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^A(P, N)$$

отображения, определяемые по формулам: $u_n(\alpha) = \alpha \circ \theta$ и $v_n(\beta) = \theta \circ \beta$. Имеем:

$$(\alpha \circ \theta) \circ \beta = \alpha \circ (\theta \circ \beta)$$

для любых $\alpha \in \mathrm{Ext}_A^{n-1}(N, A)$, $\beta \in \mathrm{Tor}_n^A(P, M)$ (с. 134, предложение 6), так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_n^A(P, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P) \\ \downarrow{\scriptstyle v_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(u_n, 1)} \\ \mathrm{Tor}_{n-1}^A(P, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^{n-1}(N, A), P), \end{array} \tag{5}$$

в которой горизонтальные стрелки представляют собой канонические гомоморфизмы, коммутативна.

Если $n = 1$, то имеем, таким образом, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_1^A(P, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^1(M, A), P) \\ \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(u_1, 1)} \\ P \otimes_A N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(N^*, P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \otimes_A L & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L^*, P), \end{array}$$

в которой столбы точные; из нее получаем искомый результат в этом случае. Если $n \geqslant 2$, то отображения u_n и v_n биективны (с. 132, следствие 4, и с. 136, следствие 3). Согласно индуктивному предположению, канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}_{n-1}^A(P, N) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^{n-1}(N, A), P)$$

инъективен (соответственно биективен); диаграмма (5) показывает, что тем же свойством обладает и канонический гомоморфизм $\mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P)$, что завершает доказательство.

3. Гомологическая размерность кольца

О п р е д е л е н и е 2. *Гомологической размерностью* кольца A называется верхняя грань в $\overline{Z}$ множества целых чисел n, для которых существуют такие два A-модуля M и N, что $\operatorname{Ext}_A^n(M, N) \neq 0$; она обозначается через $\operatorname{dh}(A)$ [1]).

Имеем; $\operatorname{dh}(0) = -\infty$, $\operatorname{dh}(A) \geqslant 0$, если $A \neq 0$. Мы увидим ниже, что $\operatorname{dh}(A) = 1$, если A – кольцо главных идеалов, не являющееся полем, и что если K –поле, то

$$\operatorname{dh}(K[X_1, \ldots, X_n]) = n.$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть n – целое число $\geqslant 0$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\operatorname{dh}(A) \leqslant n$;

(ii) $\operatorname{dp}_A(M) \leqslant n$ для всякого A-модуля M;

(ii′) $\operatorname{dp}_A(M) \leqslant n$ для всякого A-модуля M конечного типа:

(iii) для всякой точной последовательности

$$0 \to K \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \ldots \to P_0,$$

в которой P_i проективны, модуль K проективен;

(iv) *для всякой точной последовательности*

$$I^0 \to I^1 \to \ldots \to I^{n-1} \to N \to 0,$$

в которой I^i инъективны, модуль N инъективен;

(v) *всякий A-модуль обладает инъективной резольвентой длины $\leqslant n$.*

Эквивалентность условий (i), (ii) и (iii) следует из предложения 1. Очевидно, что (ii) $\Rightarrow$ (ii′). Нам достаточно, таким образом, доказать импликации (ii′) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i).

(ii′) $\Rightarrow$ (iv): в обозначениях из (iv) пусть K – ядро гомоморфизма $I^0 \to I^1$. Согласно следствию 4, с. 132, для всякого A-модуля M имеем изоморфизм $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) \to \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, K)$; из (ii′) тогда следует, что $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) = 0$ для всякого A-модуля M конечного типа. Согласно предложению 11, с. 97, это влечет за собой, что модуль N инъективен, откуда следует (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v): пусть M – A-модуль. Применяя (iv) к точной последовательности

$$0 \to M \to I^0(M) \to I^1(M) \to \ldots \to I^{n-1}(M) \to K^{n-1}(M) \to 0,$$

с. 58, заключаем, что модуль $K^{n-1}(M)$ инъективен, откуда следует (v)

(v) $\Rightarrow$ (i): это следует из теоремы 1, с. 103.

З а м е ч а н и я. 1. Если $\operatorname{dh}(A) \leqslant n < +\infty$, то $\operatorname{Tor}_{n+1}^A(P, M) = 0$ для всякого A-модуля M и всякого правого A-модуля P, так как $\operatorname{dp}_A M \leqslant n$ (ср. лемму 1).

2. Для того чтобы гомологическая размерность $\operatorname{dh}(A)$ была конечной, необходимо и достаточно, чтобы проективная размерность $\operatorname{dp}_A(M)$ была конечной для всякого ненулевого A-модуля M. Действительно, это следует из предыдущего и из следствия 1, с. 143.

С л е д с т в и е. *Предположим, что кольцо A нётерово слева, и пусть n – целое число $\geqslant 0$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\operatorname{dh}(A) \leqslant n$;

(ii) *для всякой пары A-модулей M и N конечного типа* $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$;

(iii) *для всякого левого A-модуля M конечного типа и всякого правого A-модуля P конечного типа* $\operatorname{Tor}_{n+1}^A(P, M) = 0$.

Это следует из предложений 2 и 4.

З а м е ч а н и е. Согласно эквивалентности условий (i) и (iii), имеем: $\operatorname{dh}(A) = \operatorname{dh}(A^\circ)$, если кольцо A нётерово справа и слева. Это равенство не выполняется в общем случае (с. 155, упражнение 20).

---

[1]) Гомологическую размерность кольца часто называют также глобальной размерностью кольца и обозначают через $\operatorname{gl.dim}(A)$. – *Примеч. пер.*

Предложение 5. *Предположим, что кольцо* A *нётерово слева и имеет конечную гомологическую размерность, и пусть* $\mathscr{C}_0$ (*соответственно* $\mathscr{C}$) *множество классов проективных* A*-модулей конечного типа* (*соответственно* A*-модулей конечного типа*). *Тогда канонический гомоморфизм групп Гротендика* $K(\mathscr{C}_0) \to K(\mathscr{C})$ *биективен.*

Это выводится из следствия, с. 144.

4. Кольца гомологической размерности 0

Предложение 6. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *всякий* A*-модуль проективен*;

(ii) *всякий* A*-модуль инъективен*;

(iii) *всякий идеал в* A *представляет собой инъективный модуль*;

(iv) $\mathrm{dh}(A) \leqslant 0$;

(v) *кольцо* A *полупросто*;

(vi) A *нётерово и всякий* A*-модуль плоский*,

(vii) *всякий комплекс* A*-модулей расщепляем*;

(viii) *всякая точная последовательность* A*-модулей расщепляема.*

Согласно предложению 4, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv); согласно следствию предложения 4, (vi) $\Rightarrow$ (iv). Согласно, примеру 4, с. 39, (i) $\Rightarrow$ (vii); так как импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) и (vii) $\Rightarrow$ (viii) тривиальны и так как импликация (viii) $\Rightarrow$ (i) следует из II, p. 39, prop. 4, нам остается доказать импликации (iii) $\Rightarrow$ (v) и (v) $\Rightarrow$ (vi), последнее утверждение следует из VIII, § 5, n° 1, prop. 1, 2; наконец, если всякий идеал в A инъективен, то он является прямым множителем в A, откуда следует справедливость (iii) $\Rightarrow$ (v).

5. Кольца гомологической размерности 1

Предложение 7. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathrm{dh}(A) \leqslant 1$;

(ii) *всякий подмодуль проективного модуля проективен*:

(ii′) *всякий идеал в* A *проективен*;

(iii) *всякий фактормодуль инъективного* A*-модуля инъективен*;

(iv) *для всякого проективного комплекса* C *существует такой гомологизм* φ: $C \to H(C)$, *что* $H(\varphi) = 1_{H(C)}$;

(v) *для всякого инъективного комплекса* C *существует такой гомологизм* ψ: $H(C) \to C$, *что* $H(\psi) = 1_{H(C)}$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): это следует из предложения 4 (с. 146).

(ii) $\Rightarrow$ (iv): пусть C — проективный комплекс. Если условие (ii) выполняется, то подмодуль $B(C)$ модуля C проективен, откуда следует (iv), согласно замечанию б) на с. 40.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): пусть C — инъективный комплекс. Если условие (iii) выполняется, то фактормодуль $B_n(C)$ модуля C_{n+1} инъективен для всякого n, откуда следует (v), согласно замечанию а) на с. 39.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): пусть P — проективный A-модуль, M — подмодуль в P, i: $M \to P$ — каноническое вложение. Пусть p: $L \to M$ — сюръективный гомоморфизм свободного модуля L на M. Рассмотрим проективный комплекс C, в котором $C_1 = L$, $C_0 = P$, $C_i = 0$ при $i \neq 0, 1$, $d_1 = i \circ p$. Если удовлетворяется условие (iv), то пусть φ: $C \to H(C)$ — гомологизм, для которого $H(\varphi) = 1_{H(C)}$. Так как $H_1(C) = \mathrm{Ker}\, p$, то φ_1 представляет собой проектирование модуля L на $\mathrm{Ker}\, p$, следовательно, точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\, p \to L \xrightarrow{p} M \to 0$$

расщепляема и модуль M изоморфен прямому множителю модуля L, следовательно, проективен.

(v) $\Rightarrow$ (iii): пусть I — инъективный модуль, M — фактормодуль модуля I, π: $I \to M$ — каноническая проекция. Пусть i: $M \to J$ — инъективный гомоморфизм модуля M в инъективный модуль J. Рассмотрим инъективный комплекс C, в котором $C^0 = I$, $C^1 = J$, $C^i = 0$ при $i \neq 0, 1$, $d^0 = i \circ \pi$. Если условие (v) удовлетворяется, то пусть

ψ: $H(C) \to C$ – гомологизм, для которого $H(\psi) = 1_{H(C)}$. Так как

$H^1(C) = \operatorname{Coker} i$,

то ψ^1 представляет собой сечение канонической проекции $J \to \operatorname{Coker} i$, и модуль M является прямым множителем в J, следовательно, инъективен.

(ii) $\Rightarrow$ (ii′): это тривиально.

(ii′) $\Rightarrow$ (ii): это следует из VII, § 3, th. 1, cor. 1.

Пример. Если A – кольцо главных идеалов, то $\operatorname{dh}(A) \leqslant 1$.

Замечание. Если кольцо A целостное (коммутативное), то предыдущие условия эквивалентны также следующим:

(iii′) всякий делимый A-модуль инъективен;

(vi) всякий A-модуль без кручения является плоским и кольцо A нётерово.

Целостные кольца, удовлетворяющие этим условиям, называются дедекиндовыми (см. с. 154, упражнение 12, и AC, VII, § 2, n°2, th. 1; Коммутативная алгебра, VII, с. 571, теорема 1).

Следствие. *Пусть* A – *кольцо гомологической размерности* $\leqslant 1$, C – *комплекс проективных* A-*модулей*, $\widetilde{C}$ – *комплекс проективных правых* A-*модулей*, C′ – *комплекс инъективных* A-*модулей*, P – *правый* A-*модуль*, M – *левый* A-*модуль*, n – *целое число. Тогда имеем расщепляемые точные последовательности*:

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(\widetilde{C}) \otimes_A H_q(C) \xrightarrow{\gamma} H_n(\widetilde{C} \otimes_A C) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^A(H_p(\widetilde{C}), H_q(C)) \to 0,$$

$$0 \to \prod_p \operatorname{Ext}_A^1(H_p(C), H^{n-p-1}(C')) \xrightarrow{\beta} H^n(\operatorname{Homgr}_A(C, C')) \xrightarrow{\lambda}$$

$$\xrightarrow{\lambda} \prod_p \operatorname{Hom}_A(H_p(C), H^{n-p}(C')) \to 0,$$

$$0 \to P \otimes_A H_n(C) \xrightarrow{\gamma} H_n(P \otimes_A C) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Tor}_1^A(P, H_{n-1}(C)) \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{Ext}_A^1(H_{n-1}(C), M) \xrightarrow{\beta} H^n(\operatorname{Homgr}_A(C, M)) \xrightarrow{\lambda} \operatorname{Hom}_A(H_n(C), M) \to 0.$$

Так как комплексы Z(C), B(C), $Z(\widetilde{C})$ и $B(\widetilde{C})$ проективны, а комплекс $B(C')$ инъективен, то это следует из следствия 2, с. 83, следствия 1 и следствия 2, с. 99.

6. Гомологическая размерность колец многочленов

Лемма 2. *Пусть* ρ: $A \to A'$ – *гомоморфизм колец*, M – A-*модуль*, M′ – A′-*модуль. Если правый* A-*модуль* A'_d *плоский, то* $\operatorname{dp}_{A'}(A' \otimes_A M) \leqslant \operatorname{dp}_A(M)$. *Если* A-*модуль* A'_s *проективен, то* $\operatorname{dp}_A(M') \leqslant \operatorname{dp}_{A'}(M')$.

Первое утверждение очевидно, если $\operatorname{dp}_A M = \pm\infty$; если $\operatorname{dp}_A(M) = n \in \mathbf{N}$, то существует точная последовательность A-модулей

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0,$$

в которой модули P_i проективны; последовательность A′-модулей

$$0 \to A' \otimes_A P_n \to A' \otimes_A P_{n-1} \to \ldots \to A' \otimes_A P_0 \to A' \otimes_A M \to 0$$

является точной, так как правый A-модуль A'_d плоский, и A′-модули $A' \otimes_A P_i$ проективны (II, p. 89, cor.); следовательно, $\operatorname{dp}_{A'}(A' \otimes_A M) \leqslant n = \operatorname{dp}_A(M)$. Второе утверждение очевидно, если $\operatorname{dp}_{A'}(M') = \pm\infty$; если $\operatorname{dp}_{A'}(M') = m \in \mathbf{N}$, то существует точная последовательность A′-модулей,

$$0 \to P'_m \to P'_{m-1} \to \ldots \to P'_0 \to M' \to 0,$$

в которой модули P'_i проективны; она представляет собой также точную последовательность A-модулей. С другой стороны, каждый A′-модуль P'_i является прямым множителем некоторого модуля $A_s'^{(I)}$, следовательно, является проективным A-модулем; таким образом, $\operatorname{dp}_A(M') \leqslant m = \operatorname{dp}_{A'}(M')$.

Л е м м а 3. *Предположим, что кольцо* A *коммутативно* [1]), *и пусть* M – A[X]*-модуль.*

а) *Имеют место неравенства*: $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant \mathrm{dp}_{A[X]}(M) \leqslant \mathrm{dp}_A(M) + 1$.

б) *Если гомотетия* X_M *инъективна, то* $\mathrm{dp}_A(M/XM) \leqslant \mathrm{dp}_{A[X]}(M)$.

в) *Если* $XM = 0$, *то* $\mathrm{dp}_A(M) + 1 = \mathrm{dp}_{A[X]}(M)$.

а) Имеем точную последовательность A[X]-модулей (III, p. 106 и VII, § 5, n° 1):

$$0 \to A[X] \otimes_A M \to A[X] \otimes_A M \to M \to 0;$$

утверждение а) следует теперь из следствия 2, с. 143, и из леммы 2.

б) Если $\mathrm{dp}_{A[X]}(M) = \pm\infty$, то утверждение тривиально. Если A[X]-модуль M проективный и ненулевой, то A-модуль M/XM отождествляется с $A \otimes_{A[X]} M$, следовательно, проективен и $\mathrm{dp}_A(M/XM) \leqslant 0 = \mathrm{dp}_{A[X]} M$. Далее проводим индукцию по $\mathrm{dp}_{A[X]}(M) = n$, предполагая, что $n > 0$. Рассмотрим точную последовательность A[X]-модулей $0 \to N \to L \to M \to 0$, где L – свободный A[X]-модуль; применяя к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle X_N} & & \downarrow{\scriptstyle X_L} & & \downarrow{\scriptstyle X_M} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

предложение 2, с. 9, мы видим, что гомотетия X_N инъективна и что имеет место точная последовательность

$$0 \to N/XN \to L/XL \to M/XM \to 0.$$

Так как модуль L свободен над A[X], то модуль L/XL свободен на A, и имеем:

$$\mathrm{dp}_{A[X]}(N) = n - 1, \quad \mathrm{dp}_A(M/XM) \leqslant 1 + \mathrm{dp}_A(N/XN);$$

поскольку $\mathrm{dp}_A(N/XN) \leqslant n - 1$ согласно индуктивному предположению, то отсюда получаем неравенство $\mathrm{dp}_A(M/XM) \leqslant n$, которое и требовалось доказать.

в) Утверждение тривиально, если $\mathrm{dp}_{A[X]}(M) = \pm\infty$, а также если $\mathrm{dp}_{A[X]}(M) = 0$ (что невозможно, поскольку $XM = 0$). Можно, следовательно, предполагать, что $\mathrm{dp}_{A[X]}(M) = n > 0$. Рассматривая, как и выше, точную последовательность $0 \to N \to L \to M \to 0$, где L – свободный A[X]-модуль, получаем точную последовательность

$$0 \to M \to N/XN \to L/XL \to M \to 0.$$

Согласно б), $\mathrm{dp}_A(N/XN) \leqslant \mathrm{dp}_{A[X]}(N) = \mathrm{dp}_{A[X]}(M) - 1 = n - 1$; так как $\mathrm{dp}_A(L/XL) = 0$, то из предыдущей точной последовательности, применяя два раза следствие 2, с. 143, получаем, что $\mathrm{dp}_A M \leqslant n - 1$. Но, согласно а), имеем:

$$\mathrm{dp}_A(M) \geqslant \mathrm{dp}_{A[X]}(M) - 1 = n - 1,$$

откуда следует утверждение в).

Т е о р е м а 1. *Предположим, что кольцо* A *коммутативно* [1]). *Тогда*

$$\mathrm{dh}(A[X]) = \mathrm{dh}(A) + 1.$$

Для всякого A[X]-модуля M имеем (лемма 3):

$$\mathrm{dp}_{A[X]} \leqslant \mathrm{dp}_A(M) + 1 \leqslant \mathrm{dh}(A) + 1,$$

следовательно, $\mathrm{dh}(A[X]) \leqslant \mathrm{dh}(A) + 1$; обратно, если M – любой A-модуль, то пусть $\bar{M}$ – A[X]-модуль, получаемый введением на M структуры A[X]-модуля, для которой $XM = 0$; тогда (лемма 3)

$$\mathrm{dp}_A(M) = \mathrm{dp}_{A[X]}(\bar{M}) - 1 \leqslant \mathrm{dh}(A) - 1,$$

таким образом, $\mathrm{dh}(A) \leqslant \mathrm{dh}(A[X]) - 1$.

---

[1]) Требование коммутативности кольца A в этой лемме, а также в теореме 1 и следствии 1 является излишним. – *Примеч. пер.*

Следствие 1. *Предположим, что кольцо* A *коммутативно* [1]. *Имеем*:

$$\mathrm{dh}(A[X_1, \ldots, X_n]) = \mathrm{dh}(A) + n.$$

Это вытекает из теоремы с помощью индукции по n.

Следствие 2. *Пусть* K *– поле* (*соответственно кольцо главных идеалов* * *или дедекиндово кольцо* *, *не являющееся полем*). *Тогда гомологическая размерность* $\mathrm{dh}(K[X_1, \ldots, X_n])$ *равна* n (*соответственно* $n+1$).

Это следует из того, что $\mathrm{dh}(K) = 0$ (соответственно $\mathrm{dh}(K) = 1$).

7. Гомологическая размерность градуированных модулей

В этом пункте мы предполагаем, что A – градуированное кольцо со степенями $\geqslant 0$. Обозначим через $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ его градуировку; имеем, таким образом, что $A_n = 0$ при $n < 0$, A_0 – подкольцо в A, $J_0 = \bigoplus_{n>0} A_n$ – двустороний идеал в A и градуированное факторкольцо A/J_0 отождествляется с A_0.

Лемма 4. *Пусть* M *– градуированный* A*-модуль, ограниченный снизу* (с. 61). *Если* $A_0 \otimes_A M = 0$, *то* $M = 0$.

Так как модуль $A_0 \otimes_A M$ изоморфен M/J_0M, то это следует из II, p. 171, prop. 6.

Лемма 5. *Пусть* M *– ограниченный снизу градуированный* A*-модуль и пусть*

$$s\colon A \otimes_{A_0} M/J_0M \to M$$

– градуированный A*-гомоморфизм, для которого отображение* $1 \otimes_A s\colon A_0 \otimes_A (A \otimes_{A_0} M/J_0M) \to A_0 \otimes_A M$ *представляет собой канонический изоморфизм. Тогда гомоморфизм* s *сюръективен. Если* $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$, *то гомоморфизм* s *биективен.*

Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\, s \to A \otimes_{A_0} M/J_0M \xrightarrow{s} M \to \mathrm{Coker}\, s \to 0,$$

причем градуироваиные A-модули $\mathrm{Ker}\, s$ и $\mathrm{Coker}\, s$ ограничены снизу. Из точной последовательности

$$A_0 \otimes_A (A \otimes_{A_0} M/J_0M) \xrightarrow{1 \otimes s} A_0 \otimes_A M \to A_0 \otimes \mathrm{Coker}\, s \to 0$$

заключаем, что $A_0 \otimes_A \mathrm{Coker}\, s = 0$, следовательно, гомоморфизм s сюръективен (лемма 4). Имеем теперь точную последовательность:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) \to A_0 \otimes_A \mathrm{Ker}\, s \to A_0 \otimes_A (A \otimes_{A_0} M/J_0M) \xrightarrow{1 \otimes s} A_0 \otimes_A M.$$

Если $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$, то $A_0 \otimes_A \mathrm{Ker}\, s = 0$ и гомоморфизм s инъективен (лемма 4).

Предложение 8. *Пусть* M *– ограниченный снизу градуированный* A*-модуль.*

а) *Следующие условия эквивалентны*:

(i) M *изоморфен градуированному* A*-модулю вида* $A \otimes_{A_0} N$, *где* N *– проективный* (*соответственно градуированный свободный*) *градуированный* A_0*-модуль*;

(ii) M *– проективный* (*соответственно градуированный свободный*) A*-модуль*;

(iii) M/J_0M *– проективный* (*соответственно градуированный свободный*) A_0*-модуль и* $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$.

б) *Предположим дополнительно, что* M *обладает системой порождающих, образованной из однородных элементов ограниченных степеней. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *Градуированный* A*-модуль* M *обладает конечным композиционным рядом, факторы которого изоморфны градуированным* A*-модулям вида* $A \otimes_{A_0} N$, *где* N *– плоский градуированный* A_0*-модуль*;

(ii) M *– плоский* A*-модуль*;

(iii) M/J_0M *– плоский* A_0*-модуль и* $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$.

В каждом из двух случаев, имеем, очевидно, импликации: (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii). Остается, таким образом, доказать импликацию (iii) ⇒ (i).

---

[1] См. сноску на с. 149. – *Примеч. пер.*

а) Градуированный A-модуль $A \otimes_{A_0} M/J_0M$ представляет собой проективный A-модуль, так как M/J_0M – проективный A_0-модуль. Канонический гомоморфизм A-модулей

$$p\colon M \to M/J_0M$$

сюръективен; следовательно, существует градуированный A-гомоморфизм степени нуль

$$s\colon A \otimes_{A_0} M/J_0M \to M,$$

для которого $p \circ s\,(a \otimes x) = ax$ при $a \in A$ и $x \in M/J_0M$.

Согласно лемме 5, s представляет собой изоморфизм A-модулей нз $A \otimes_{A_0} M/J_0M$ на M, откуда следует (i).

б) Согласно сделанному относительно M предположению, существуют такие целые числа a, b, причем $a \leqslant b$, что M порождается множеством $\bigoplus_{a \leqslant i \leqslant b} M_i$. Проводим индукцию по положительному целому числу $b - a$.

Если $b - a = 0$, то M порождается множеством M_a и канонический A_0-гомоморфизм $M_a \to M/J_0M$ биективен; из A-гомоморфизма $A \otimes_{A_0} M_a \to M$, определяемого структурой A-модуля на M, получаем градунрованный A-гомоморфизм

$$s\colon A \otimes_{A_0} M/J_0M \to M,$$

удовлетворяющий условию леммы 5. Согласно лемме 5, гомоморфизм s биективен, откуда следует (i).

В общем случае пусть $M^{(a)}$ – (градуированный) A-подмодуль в M, порождаемый множеством M_a, и M' – фактормодуль $M/M^{(a)}$. Имеем точную последовательность

$$0 \to M^{(a)} \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \to 0,$$

из которой, так как, по предположению, $\operatorname{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$, получаем точные последовательности

$$\operatorname{Tor}_2^A(A_0, M') \to \operatorname{Tor}_1^A(A_0, M^{(a)}) \to 0, \tag{6}$$

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(A_0, M') \to M^{(a)}/J_0M^{(a)} \xrightarrow{1 \otimes f} M/J_0M \xrightarrow{1 \otimes g} M'/J_0M' \to 0. \tag{7}$$

Но канонический гомоморфнзм $M_a \to M^{(a)}/J_0M^{(a)}$ *биективен.* Отсюда следует, что гомоморфизм $1 \otimes f\colon M^{(a)}/J_0M^{(a)} \to M/J_0M$ инъективен и что его образ – *прямой множитель* A_0-модуля M/J_0M. Поэтому из точной последовательности (7) вытекает, что $\operatorname{Tor}_1^A(A_0, M') = 0$ и что A_0-модуль M'/J_0M' плоский, так как он изоморфен прямому множителю A_0-модуля M/J_0M. Согласно индуктивному предположению (которое применимо к модулю M', так как он порождается множествами M_i' для $a < i \leqslant b$), модуль M' удовлетворяет условию (i), следовательно, плоский. Из точной последовательности (6) теперь получаем, что $\operatorname{Tor}_1^A(A_0, M^{(a)}) = 0$; но $M^{(a)}/J_0M^{(a)}$ отождествляется с M_a, который является плоским A_0-модулем (как прямой множитель A_0-модуля M/J_0M); согласно уже доказанному, градуированный A-модуль $M^{(a)}$ изоморфен $A \otimes_{A_0} M_a$ и, следовательно, тоже удовлетворяет условию (i), что завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть* M – *градуированный* A-*модуль конечного типа. Если* A_0-*модуль* M/J_0M *проективный* (*соответственно градуированный свободный, соответственно плоский*) *и если* $\operatorname{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$, *то* A-*модуль* M *проективный* (*соответственно градуированный свободный, соответственно плоский*).

Следствие 2. *Предположим, что всякий проективный* A_0-*модуль свободен* (*соответственно, что кольцо* A *нётерово и что всякий проективный* A_0-*модуль конечного типа свободен*). *Пусть* M – *ограниченный снизу градуированный* A-*модуль* (*соответственно градуированный* A-*модуль конечного типа*) *и* n – *такое целое число* $\geqslant 0$, *что* $\operatorname{dp}_A M \leqslant n$. *Существует точная последовательность градуированных* A-*модулей и градуированных гомоморфизмов степени* 0

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0,$$

в которой L_i *– ограниченные снизу свободные градуированные* A*-модули (соответственно свободные градуированные* A*-модули конечного типа).*

Действительно, существует (с. 61, предложение 11) точная последовательность градуированных A-модулей и гомоморфизмов степени 0

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0,$$

в которой модули L_i ограничены снизу (соответственно конечного типа) при $0 \leqslant i \leqslant n$ и являются градуированными свободными при $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Так как $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$, то A-модуль L_n проективен, следовательно, $A_0 \otimes_A L_n$ – проективный A_0-модуль, следовательно, градуированный свободный; так как A-модуль L_n ограничен снизу и A_0-модуль $A_0 \otimes_A L_n$ градуированный свободный, то L_n – градуированный свободный модуль (предложение 7).

Следствие 3 (теорема Гильберта о сизигиях). *Предположим, что* A_0 *– поле и что* A *порождается как* A_0*-алгебра* n *алгебраически независимыми однородными элементами степеней* > 0. *Для всякого градуированного* A*-модуля* M, *ограниченного снизу (соответственно конечного типа), существует точная последовательность градуированных* A*-модулей и градуированных гомоморфизмов степени* 0

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0,$$

в которой L_i *– свободные градуированные модули, ограниченные снизу (соответственно конечного типа).*

Действительно, $\mathrm{dh}(A) = n$ согласно теореме 1, с. 149, и можно применить следствие 2.

Замечание. Следствие 2 применимо равным образом к следующим случаям:

а) A_0 – кольцо главных идеалов и $A = A_0[X_1, \ldots, X_{n-1}]$,

б) ${}^*A_0$ – регулярное локальное нётерово кольцо размерности r и $A = A_0[X_1, \ldots, X_{n-r}]$*.

Следствие 4. *Предположим, что* A_0 *– полупростое кольцо. Пусть* M *– ограниченный снизу градуированный* A*-модуль и* n *– целое число* $\geqslant 0$. *Для того чтобы* $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A_0, M) = 0$.

Если $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$, то $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A_0, M) = 0$ (с. 142, лемма 1). Обратно, пусть $0 \to K \to L_{n-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ – точная последовательность ограниченных снизу градуированных A-модулей, в которой $L_0, \ldots, L_{n-1}$ – свободные градуированные модули (с. 61, предложение 11); согласно следствию 3, с. 136, равенство $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A_0, M) = 0$ влечет за собой, что $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, K) = 0$; так как K/J_0K – проективный A_0-модуль (поскольку кольцо A_0 полупростое, см. предложение 6, с. 147), A-модуль K проективен согласно предложению 8 (с. 150) и $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$.

Следствие 5. *Предположим, что кольцо* A_0 *полупростое. Если* $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A_0, A_0) = 0$, *то* $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant n$ *для всякого ограниченного снизу градуированного* A*-модуля* M.

Обозначим через A° градуированное кольцо, противоположное A; имеем $(A^\circ)_0 = (A_0)^\circ$, следовательно, кольцо $(A^\circ)_0$ полупростое (VIII, § 5, n°1, remarque 3; Алгебра, VIII, с. 167, предложение 2). Так как $\mathrm{Tor}_{n+1}^{A^\circ}(A_0^\circ, A_0^\circ) = 0$, то $\mathrm{dp}_A(A_{0s}^\circ) \leqslant n$ согласно следствию 4; это влечет, что $\mathrm{Tor}_{n+1}^{A^\circ}(M^\circ, A_0^\circ) = 0$ для всякого A-модуля M, следовательно, $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(A_0, M) = 0$, и можно применить следствие 4.

Упражнения

1. Пусть u: $A \to B$ – гомоморфизм колец, M – B-модуль. Доказать неравенство

$$\mathrm{dp}_A(M) \leqslant \mathrm{dp}_B(M) + \mathrm{dp}_A(B_s).$$

(Провести индукцию по $\mathrm{dp}_B(M)$ или использовать спектральную последовательность из упражнения 6, с. 102.)

2. Предположим, что кольцо A нётерово; пусть M – A-модуль конечного типа проективной размерности n. Показать, что k-модуль $\mathrm{Ext}_A^n(M, A)$ иенулевой.

3. Пусть n – целое число $\geqslant 1$. Показать, что $\mathrm{dh}(M_n(A)) = \mathrm{dh}(A)$ (ср. VIII, § 4).

4. Пусть M – A-модуль. *Инъективной размерностью* модуля M называется нижняя грань в $\overline{\mathbf{Z}}$ длин его инъективных резольвент; она обозначаеся через $\mathrm{di}_A(M)$.

Если n – целое число $\geqslant 0$, показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathrm{di}_A(M) \leqslant n$;

β) $\mathrm{Ext}_A^r(N, M) = 0$ для всякого A-модуля N и всякого целого $r \geqslant n$;

γ) $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, M) = 0$ для всякого A-модуля N;

δ) $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, M) = 0$ для всякого моногенного A-модуля N;

ϵ) для всякой точной последовательности $0 \to M \to I^0 \to \ldots \to I^{n-1} \to N \to 0$, в которой модули I^k инъективны, модуль N инъективен.

5. Пусть $(M_i)_{i \in E}$ – некоторое семейство A-модулей

а) Показать, что $\mathrm{di}_A\left(\prod_{i \in E} M_i\right) = \sup_{i \in E} \mathrm{di}_A(M_i)$.

б) Если кольцо A нётерово, показать, что $\mathrm{di}_A\left(\bigoplus_{i \in E} M_i\right) = \sup_{i \in E} \mathrm{di}_A(M_i)$.

в) Если $\mathrm{di}_A\left(\bigoplus_{i \in E} M_i\right) = \sup_{i \in E} \mathrm{di}_A(M_i)$ для всякого семейства A-модулей $(M_i)_{i \in E}$, то кольцо A нётерово (использовать упражнение 21, с. 27).

6. Пусть I – множество всех левых идеалов кольца A. Показать, что $\mathrm{dh}(A) = \sup_{\mathfrak{a} \in I} \mathrm{dp}_A(A/\mathfrak{a})$.

7. Пусть M – A-модуль. *Плоской размерностью* модуля M называется нижняя грань в $\overline{\mathbf{Z}}$ длин его плоских резольвент; она обозначается через $\mathrm{dpl}_A(M)$.

а) Если n – целое число $\geqslant 0$, то показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathrm{dpl}_A(M) \leqslant n$;

β) $\mathrm{Tor}_r^A(N, M) = 0$ для всякого правого A-модуля N и всякого целого $r > n$;

γ) $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(N, M) = 0$ для всякого правого A-модуля N;

δ) $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(N, M) = 0$ для всякого моногенного правого A-модуля N;

ϵ) для всякой точной последовательности $0 \to K \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$, в которой модули P_k плоские, модуль K плоский.

б) Показать, что $\mathrm{dpl}_A(M) \leqslant \mathrm{dp}_A(M)$; если кольцо A нётерово и M – модуль конечного типа, то имеет место равенство.

в) Пусть $(N_\alpha)_{\alpha \in I}$ – индуктивная система A-модулей и N – ее индуктивный предел. Доказать неравенство:

$$\mathrm{dpl}_A(N) \leqslant \sup_{\alpha \in I} \mathrm{dpl}_A(N_\alpha).$$

8. tor-размерностью кольца A называется верхняя грань в $\overline{\mathbf{Z}}$ множества целых чисел n, для которых существуют левый A-модуль N и правый A-модуль M такие, что $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \neq 0$; она обозначается через $\mathrm{td}(A)$.

а) Пусть n – целое число $\geqslant 0$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathrm{td}(A) \leqslant n$;

β) $\mathrm{dpl}_A(M) \leqslant n$ (упражнение 7) для всякого A-модуля M;

γ) $\mathrm{dpl}_A(M) \leqslant n$ для всякого моногенного A-модуля M.

б) Показать, что $\mathrm{td}(A) = \mathrm{td}(A^\circ)$ и $\mathrm{td}(A) \leqslant \mathrm{dh}(A)$; если кольцо A нётерово слева, то имеет место равенство.

¶ 9. а) Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Всякий (левый) идеал конечного типа в A является проективным A-модулем.

β) Всякий подмодуль конечного типа в проективном A-модуле проективен.

γ) $\mathrm{td}(A) \leqslant 1$ (упражнение 8) и кольцо A когерентно (с. 67, упражнение 11).

δ) Для всякого множества I всякий подмодуль в A^I плоский.

б) Предположим, что кольцо A удовлетворяет эквивалентным условиям из пункта а). Доказать, что всякий проективный A-модуль изоморфен прямой сумме идеалов конечного типа кольца A. (Рассмотреть сначала случай модуля конечного типа; затем рассмотреть случай модуля, обладающего счетной системой порождающих, замечая, что всякий элемент проективного A-модуля P содержится в прямом множителе конечного типа модуля P. Общий случай вывести из теоремы Капланского (II, p. 183, exercice 2).)

10. Предположим, что кольцо A целостное; пусть K – его поле частных. Идеал $\mathfrak{a}$ кольца A называется *обратимым*, если существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_n \in K$, что $x_i \mathfrak{a} \subset A$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\sum_i x_i \mathfrak{a} = A$.

а) Показать, что всякий обратимый идеал имеет конечный тип.

б) Показать, что ненулевой идеал кольца A представляет собой проективный A-модуль в том и только том случае, если он обратим.

в) Пусть $\mathfrak{a}$ – обратимый идеал кольца A, D – делимый A-модуль. Доказать, что $\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{a}, D) = 0$ при $i \geqslant 1$.

11. а) Предположить, что кольцо A целостное. Показать, что условия α) – δ) из упражнения 9 эквивалентны еще следующим условиям:

ϵ) Всякий A-модуль конечного типа без кручения проективен.

ζ) Всякий A-модуль без кручения плоский.

η) Всякий подмодуль плоского A-модуля плоский.

(Использовать упражнение 13, с. 26.)

Целостное кольцо, удовлетворяющее этим условиям, называется *прюферовым*.

б) Пусть B – целостное кольцо, представляющее собой объединение возрастающего направленного семейства прюферовых подколец. Показать, что кольцо B прюферово.

* в) Показать, что кольцо всех целых алгебраических чисел прюферово. *

12. Предположим, что кольцо A целостное. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathrm{dh}(A) \leqslant 1$.

β) Всякий делимый A-модуль инъективен.

γ) Кольцо A прюферово (упражнение 11) и нётерово.

(Чтобы доказать, что из α) следует β), использовать упражнение 10.)

Когда эти условия выполняются, A называют *дедекиндовым кольцом*.

13. Предположим, что кольцо A нётерово слева и справа. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) $\mathrm{dh}(A) \leqslant 2$.

β) Для любых целых чисел p, q и всякого A-линейного отображения u: $A^p \to A^q$ ядро u представляет собой проективный A-модуль.

γ) Модуль, сопряженный к произвольному A-модулю конечного типа, проективен.

14. Пусть x – элемент кольца A, *регулярный слева*.

а) Показать, что идеал xA двусторонний, если и только если существует эндоморфизм σ кольца A, для которого $ax = x\sigma(a)$ при любом $a \in A$.

б) Предполагаем, далее, что выполнены условия пункта а). Пусть M – A-модуль, для которого $x\mathrm{M} = 0$. Доказать равенство $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) = \mathrm{dp}_{A/xA}(\mathrm{M}) + 1$ (можно использовать спектральную последовательность из упражнения 6, г), с. 102).

в) Предположим, что x принадлежит радикалу кольца A и что A нётерово. Пусть N – A-модуль конечного типа, для которого гомотетия относительно x инъективна в N. Показать, что $\mathrm{dp}_A(\mathrm{N}) = \mathrm{dp}_{A/xA}(\mathrm{N}/x\mathrm{N})$.

г) В условиях пункта в) показать, что $\mathrm{dh}(A) = \mathrm{dh}(A/xA) + 1$.

15. Пусть σ – *автоморфизм* кольца A.

а) Обозначим через $A_\sigma[X]$ кольцо, определенное в VIII, § 1, n° 3. Показать, что

$$\mathrm{dh}(A_\sigma[X]) = \mathrm{dh}(A) + 1.$$

(Неравенство $\mathrm{dh}(A_\sigma[X]) \geqslant \mathrm{dh}(A) + 1$ следует из упражнения 14, б); для получения противоположного неравенства, взять за образец доказательство леммы 3, а), с. 149.)

б) Обозначим через $A_\sigma[[X]]$ кольцо, определенное в IV, § 4, exercice 8 (Алгебра, IV, с. 80–81, упражнение 10). Показать, что если кольцо A нётерово, то $\mathrm{dh}(A_\sigma[[X]]) = \mathrm{dh}(A) + 1$ (использовать упражнение 14).

16. Пусть A – локальное кольцо, нётерово справа и слева, $\mathfrak{m}$ – его максимальный идеал; обозначим через k_s (соответственно k_d) левый (соответственно правый) A-модуль $A/\mathfrak{m}$. Пусть M – левый A-модуль конечного типа и n – целое число.

а) Показать, что $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant n$, если и только если $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k_d, \mathrm{M}) = 0$ (использовать упражнение 4, с. 86).

б) Показать, что $\mathrm{dh}_A(A) = \mathrm{dp}_A(k_s)$; для того чтобы $\mathrm{dh}(A) \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k_d, k_s) = 0.$$

в) Пусть x – элемент из центра кольца A, принадлежащий $\mathfrak{m}$, причем гомотетия относительно x в M инъективна. Показать, что $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}/x\mathrm{M}) = \mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) + 1$ (см. также упражнение 14).

17. Пусть M – A-модуль, I – вполне упорядоченное множество, $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ – возрастающее семейство подмодулей в M, для которого $\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathrm{M}_\alpha$. Положим $\mathrm{M}'_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathrm{M}_\beta$ для $\alpha \in \mathrm{I}$.

а) Доказать неравенство $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant \sup_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathrm{dp}_A(\mathrm{M}_\alpha/\mathrm{M}'_\alpha)$.

б) Предположим, что существует целое число n, для которого $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}'_\alpha) \leqslant n$ при всяком $\alpha \in \mathrm{I}$. Показать, что

$$\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant n + 1.$$

18. а) Пусть $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ – индуктивная система A-модулей относительно *счетного* множества I, M – ее предел, n – целое число $\geqslant 0$. Показать, что если $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}_\alpha) \leqslant n$ для всякого $\alpha \in \mathrm{I}$, то $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant n + 1$ (свести к случаю $n = 0$ и $\mathrm{I} = \mathbf{N}$, затем написать точную последовательность $0 \to \bigoplus_n \mathrm{M}_n \to \bigoplus_n \mathrm{M}_n \to \mathrm{M} \to 0$).

б) Пусть P – плоский модуль, обладающий представлением $A^{(S)} \to A^{(T)} \to P \to 0$, где множество S *счетное*. Вывести из а), что $\mathrm{dp}_A(P) \leqslant 1$.

в) Предположим, что всякий левый идеал кольца A порождается счетным множеством элементов. Доказать, что $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{dpl}_A(\mathrm{M}) + 1$ для всякого A-модуля M, порождаемого счетным семейством элементов. Вывести отсюда неравенства: $\mathrm{dh}(A) \leqslant \mathrm{td}(A) + 1$ и $|\mathrm{dh}(A) - \mathrm{dh}(A^\circ)| \leqslant 1$. (Использовать упражнение 12, с. 67, упражнение 8, с. 153, а также пункт б).)

¶ 19. а) Пусть n – целое число $\geqslant 0$, $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ – индуктивная система A-модулей, M – ее предел. Предположим, что $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) \leqslant \aleph_n$ (E, III, p. 87, exercice 10; Теория множеств, III, с. 231, упражнение 10) и что существует целое число r, для которого $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}_\alpha) \leqslant r$ при всяком $\alpha \in \mathrm{I}$. Показать, что $\mathrm{dp}_A(\mathrm{M}) \leqslant r + n + 1$ (провести индукцию по n, используя упражнение 18, а), и упражнение 17).

б) Предположим, что всякий левый идеал кольца A порождается семейством элементов мощности $\leqslant \aleph_n$. Доказать, что $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant \mathrm{dpl}_A(M) + n + 1$ для всякого A-модуля M, порождаемого семейством элементов мощности $\leqslant \aleph_n$. Вывести отсюда неравенства

$$\mathrm{dh}(A) \leqslant \mathrm{td}(A) + n + 1 \quad \text{и} \quad |\mathrm{dh}(A) - \mathrm{dh}(A^\circ)| \leqslant n + 1.$$

¶ 20. Пусть R – кольцо главных идеалов, K – его поле частных. Обозначим через B подкольцо в $M_2(K)$, образованное матрицами $\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$, где $a \in R$, $x, y \in K$.

а) Показать, что кольцо B нётерово слева, но не является нётеровым справа.

б) Показать, что $\mathrm{dh}(B) = 1$, а $\mathrm{dh}(B^\circ) = 2$.

¶ 21. Пусть $\mathfrak{r}$ – радикал кольца A. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Кольцо $A/\mathfrak{r}$ полупросто и для всякой последовательности $(a_n)_{n \geqslant 1}$ элементов из $\mathfrak{r}$ существует такое целое число n, что $a_1 \ldots a_n = 0$.

β) Всякий A-модуль обладает проективным накрытием.

γ) $\mathrm{dpl}_A(M) = \mathrm{dp}_A(M)$ (с. 153, упражнение 7) для всякого A-модуля M.

δ) Для всякой индуктивной системы A-модулей $(M_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$

$$\mathrm{dp}_A(\varinjlim M_\alpha) \leqslant \sup_{\alpha \in I} \mathrm{dp}_A(M_\alpha).$$

ϵ) Всякий плоский A-модуль проективен.

φ) Всякая убывающая последовательность моногенных правых идеалов кольца A стационарна.

(Для доказательств эквивалентности условий α) и β) см. VIII, § 8, exercice 26. Чтобы показать, что из β) следует γ), заметить, что M обладает минимальной проективной резольвентой P и что модуль $P_n/\mathfrak{r}P_n$ изоморфен $\mathrm{Tor}_n^A(A/\mathfrak{r}, M)$. Для доказательства импликации $\epsilon) \Rightarrow \varphi)$ пусть $(I_n)_{n \geqslant 1}$ – убывающая последовательность моногенных правых идеалов, так что

$I_n = a_1 \ldots a_n A$, где $a_i \in A$.

В свободном модуле $A^{(N)}$ рассмотреть подмодуль N_p, порождаемый элементами $e_1 - a_1 e_2, \ldots, e_p - a_p e_{p+1}$. Вывести из ϵ), что $N = \bigcup_p N_p$ представляет собой прямой множитель в $A^{(N)}$; отсюда сделать вывод, что $I_{n+1} = I_n$ при достаточно большом n. Для доказательства импликации $\varphi) \Rightarrow \alpha)$ использовать VIII, § 9, exercice 12.)

22. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Всякий конечно представимый A-модуль конечной проективной размерности проективен.

β) Всякий инъективный A-гомоморфизм $A^p \to A^q$ допускает ретракцию.

γ) Для всякого правого идеала конечного типа $\mathfrak{a}$, отличного от A, существует ненулевой элемент $x \in A$, для которого $x\mathfrak{a} = 0$.

δ) Всякий конечно представимый простой правый A-модуль изоморфен (минимальному) правому идеалу кольца A.

(Заметить, что условие γ) эквивалентно условию β) в случае $p = 1$.)

¶ 23. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Всякий A-модуль конечной проективной размерности проективен.

β) Кольцо A удовлетворяет эквивалентным условиям упражнения 21, и для всякого правого идеала конечного типа $\mathfrak{a}$, отличного от A, существует элемент $x \neq 0$ в A, для которого $x\mathfrak{a} = 0$.

γ) Кольцо A удовлетворяет эквивалентным условиям упражнения 21, и всякий простой A-модуль является фактормодулем инъективного A-модуля.

(Используя доказательство упражнения 21, показать, что из условия α) следует, что всякая убывающая последовательность моногенных правых идеалов в A стационарна. Затем вывести из упражнения 22 эквивалентность условий α) и β). Чтобы увидеть, что из условия α) следует γ), рассмотреть проективное накрытие P простого модуля M, инъективный модуль I, содержащий P, и проективное накрытие Q модуля I; определить надлежащий A-гомоморфизм из Q в P и получить отсюда сюръекцию модуля I на M. Чтобы вывести, что из γ) следует α), показать, что A-модуль M, для которого $\mathrm{dp}_A(M) \leqslant 1$, проективен, рассмотрев проективное накрытие p: $P \to M$ и сюръекцию модуля $\mathrm{Ker}\, p$ на некоторый простой модуль.)

24. Обозначим через $\mathrm{dhf}(A)$ (соответственно $\mathrm{dif}(A)$, соответственно $\mathrm{tdf}(A)$) верхнюю грань проективных (соответственно инъективных, соответственно плоских) размерностей A-модулей, для которых эта размерность конечна. Если A имеет конечную гомологическую размерность, то $\mathrm{dhf}(A) = \mathrm{dif}(A) = \mathrm{dh}(A)$ и $\mathrm{tdf}(A) = \mathrm{td}(A)$. Если $\mathrm{td}(A) < \infty$, то $\mathrm{tdf}(A) = \mathrm{td}(A)$.

а) Показать, что $\mathrm{tdf}(A) \leqslant \mathrm{dif}(A^\circ)$; если кольцо A нётерово слева, то имеет место равенство (использовать упражнение 3, с. 113).

б) Предположим, что кольцо A нётерово слева. Показать, что $\mathrm{dhf}(A) \leqslant \mathrm{di}_A(A_S)$. Если размерности $\mathrm{di}_A(A_S)$ и $\mathrm{dif}(A)$ конечны, то показать, что они равны (использовать упражнение 2, с. 152).

в) Пусть G – конечная группа, не сводящаяся к одному нейтральному элементу, A – кольцо $Z^{(G)}$. Показать, что

$$\mathrm{dh}(A) = +\infty, \quad \mathrm{dhf}(A) = \mathrm{dif}(A) = \mathrm{tdf}(A) = 1, \quad \mathrm{di}_A(A_S) = +\infty.$$

(ср. упражнение 20, с. 117).

г) Предположим, что кольцо A *самоинъективно* (с. 28, упражнение 26), но не полупросто. Показать, что всякий непроективный A-модуль имеет бесконечные проективную и инъективную размерности. Вывести отсюда, что $\mathrm{dh}(A) = +\infty$, $\mathrm{dhf}(A) = \mathrm{dif}(A) = \mathrm{tdf}(A) = \mathrm{di}_A(A_s) = 0$.

25. Обозначим через A^e k-алгебру $A \otimes_k A^\circ$, и будем рассматривать A как левый A^e-модуль. Положим

$$\mathrm{da}_k(A) = \mathrm{dp}_{A^e}(A).$$

Если n – целое число $\geqslant 0$, то неравенство $\mathrm{da}_k(A) \leqslant n$ эквивалентно, таким образом, обращению в нуль k-модуля $H^{n+1}(A, M)$ для всякого (A, A)-бимодуля M (с. 119, упражнение 26). Имеем: $\mathrm{da}_k(A) = \mathrm{da}_k(A^\circ)$.

а) Показать, что $\mathrm{da}_k(M_n(k)) = 0$ и $\mathrm{da}_k(k[X_1, \ldots, X_n]) = n$ для всякого $n \geqslant 0$.

б) Если k – поле, то $\mathrm{da}_k(A) = 0$, если и только если k-алгебра A абсолютно полупростая (см. VIII, § 11, n° 3, th. 2; Алгебра, VIII, с. 223, определение 2).

в) Пусть M – свободный k-модуль. Доказать, что $\mathrm{da}_k(T_k(M)) = 1$ (если $(e_i)_{i \in I}$ – базис модуля M, то доказать, что элементы $(e_i \otimes 1 - 1 \otimes e_i)$ образуют базис левого идеала алгебры A^e, служащего ядром умножения $A \otimes_k A^\circ \to A$, где $A = T_k(M)$).

г) Предполагаем далее, что k-модуль A *проективен*. Пусть $\rho\colon k \to k'$ – гомоморфизм коммутативных колец; показать, что $\mathrm{da}_{k'}(A \otimes_k k') \leqslant \mathrm{da}_k(A)$. Если гомоморфизм ρ инъективен и $\rho(k)$ – прямой множитель k-модуля k', то имеет место равенство (использовать упражнение 26, в), с. 119).

д) Пусть B – вторая k-алгебра (ассоциативная и унитарная), проективная над k. Показать, что

$$\mathrm{da}_k(A \otimes_k B) \leqslant \mathrm{da}_k(A) + \mathrm{da}_k(B).$$

Если, кроме того, k – поле и алгебры A и B конечномерны над k, то имеет место равенство (использовать упражнение 26, г), с. 119–120).

е) Предположим, что k – поле. Доказать неравенства: $\mathrm{dh}(A) \leqslant \mathrm{da}_k(A)$ и $\mathrm{dh}(A^\circ) \leqslant \mathrm{da}_k(A)$ (ср. упражнение 26, д), с. 120).

26. Пусть A – пополненная k-алгебра (с. 120, упражнение 27); предположим, что существует гомоморфизм $\rho\colon A \to A^e$, удовлетворяющий условиям упражнения 27, в), с. 120. Показать, что $\mathrm{da}_k(A) = \mathrm{dp}_A(k)$; если, кроме того, k – поле, то $\mathrm{da}_k(A) = \mathrm{dp}_A(k) = \mathrm{dh}(A) = \mathrm{dh}(A^\circ)$. (Использовать упражнение 27, б) и в), с. 120, и упражнение 26, д), с. 120.) В частности, если V – ненулевое векторное k-пространство, то $\mathrm{dh}\, T_k(V) = 1$.

*27. Предположим, что k – поле. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над k размерности n, U – ее обертывающая алгебра. Показать, что $\mathrm{dh}\, U = n$. (Использовать упражнение 26, упражнение 27, г), с. 120, и упражнение 28, в), с. 121.)

¶ 28. Пусть G – группа. *Когомологической размерностью* группы G называется проективная размерность $Z^{(G)}$-модуля Z; она обозначается через $\mathrm{dc}(G)$. Если n – целое число, то, следовательно, $\mathrm{dc}(G) \leqslant n$, если и только если $H^q(G, M) = 0$ для всякого $Z^{(G)}$-модуля M и всякого $q > n$.

а) Доказать, что $\mathrm{da}_Z(Z^{(G)}) = \mathrm{dc}(G)$ (использовать упражнение 26 и упражнение 27, г), с. 120).

б) Если G – свободная группа, не сводящаяся к нейтральному элементу, то $\mathrm{dc}(G) = 1$.

в) Пусть H – подгруппа в G; доказать неравенство: $\mathrm{dc}(H) \leqslant \mathrm{dc}(G)$. Если $\mathrm{dc}(G) < \infty$ и H имеет конечный индекс в G, то показать, что $\mathrm{dc}(H) = \mathrm{dc}(G)$ (показать, что для $q = \mathrm{dc}(G)$ гомоморфизм

$$t^q\colon H^q(H, M) \to H^q(G, M)$$

из упражнения 14, с. 115, сюръективен).

г) Показать, что когомологическая размерность конечной группы, не сводящейся к нейтральному элементу, бесконечная. Вывести отсюда, что если $\mathrm{dc}(G) < \infty$, то всякий элемент группы G, отличный от нейтрального элемента, имеет бесконечный порядок (в этом случае говорят, что G – группа *без кручения*).

д) Если G – группа без кручения и H – подгруппа конечного индекса в G, то показать, что $\mathrm{dc}(H) = \mathrm{dc}(G)$. (Если (P, p) – проективная резольвента $Z^{(H)}$-модуля Z и если $(G : H) = n$, то определить на градуированном $Z^{(H)}$-модуле $T^n_Z(P)$ структуру $Z^{(G)}$-комплекса таким способом, чтобы пара $(T^n_Z(P), p^{\otimes n})$ была проективной резольвентой $Z^{(G)}$-модуля Z.)

е) Если H – нормальная подгруппа в G, то показать, что

$$\mathrm{dc}(G) \leqslant \mathrm{dc}(H) + \mathrm{dc}(G/H).$$

§ 9. КОМПЛЕКСЫ КОЗЮЛЯ

В этом параграфе все рассматриваемые кольца коммутативны.

1. Комплексы $\mathbf{K}(u)$, $\mathbf{K}_{\cdot}(u, C)$, $\mathbf{K}^{\cdot}(u, C)$

Пусть A – кольцо, L – A-модуль, u: L → A – линейная форма и $\Lambda(L)$ – внешняя алгебра A-модуля L. Для $x \in \Lambda(L)$ обозначим через $d_u(x)$ внутреннее произведение $x \llcorner u$ (III, p. 161, exemple; см. также Алгебра, III, с. 442–445). Согласно III, p. 162, формула (60), имеем:

$$d_u(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u(e_i) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n \qquad (1)$$

для $e_1, \ldots, e_n \in L$. Согласно III, p. 164 и 165, отображение d_u: $\Lambda(L) \to \Lambda(L)$ представляет собой антидифференцирование степени -1, имеющее нулевой квадрат. Это единственное антидифференцирование A-алгебры $\Lambda(L)$, продолжающее отображение u: $\Lambda^1(L) \to \Lambda^0(L)$.

Определение 1. Комплекс $(\Lambda(L), d_u)$ обозначается через $\mathbf{K}^A(u)$ или $\mathbf{K}(u)$.

Следует обратить внимание, что $\mathbf{K}_n(u) = \Lambda^n(u) = \mathbf{K}^{-n}(u)$.

Ясно, что комплекс $\mathbf{K}(u)$ нулевой справа и что $H_0(\mathbf{K}(u)) = \mathrm{Coker}\,(u) = A/\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}$ – идеал $u(L)$ в A.

Для всякого комплекса A-модулей C положим:

$$\mathbf{K}^A_{\cdot}(u, C) = C \otimes_A \mathbf{K}^A(u), \qquad \mathbf{K}^{\cdot}_A(u, C) = \mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), C),$$

$$H^A_{\cdot}(u, C) = H(C \otimes_A \mathbf{K}^A(u)), \qquad H^{\cdot}_A(u, C) = H(\mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), C)),$$

$$H^A_r(u, C) = H_r(C \otimes_A \mathbf{K}^A(u)), \qquad H^r_A(u, C) = H^r(\mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), C)).$$

Имеем, следовательно, канонические гомоморфизмы A-модулей (с. 71 и с. 89):

γ_0: $H_0(C) \otimes_A A/\mathfrak{q} \to H^A_0(u, C)$,

λ^0: $H^0_A(u, C) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q}, H^0(C))$.

Лемма 1. *Если комплекс* C *нулевой справа (соответственно слева), то комплекс* $\mathbf{K}^A_{\cdot}(u, C)$ *(соответственно* $\mathbf{K}^{\cdot}_A(u, C)$*) нулевой справа (соответственно слева) и отображение* γ_0 *(соответственно* λ^0*) биективно.*

Это следует из предложения 1, с. 71, и предложения 1, с. 89.

Предложение 1. *Пусть* $x \in L$; *обозначим через* R_x: $y \mapsto x \wedge y$ *умножение слева на* x *в алгебре* $\Lambda(L)$. *Тогда* $d_u \circ R_x + R_x \circ d_u = u(x) \cdot 1_{\Lambda(L)} = u(x)_{\Lambda(L)}$.

Действительно, $(d_u \circ R_x + R_x \circ d_u)(y) = d_u(x \wedge y) + x \wedge d_u(y)$; так как d_u – антидифференцирование, то $d_u(x \wedge y) + x \wedge d_u(y) = d_u(x) \wedge y = u(x) \cdot y$.

Следствие 1. *Если отображение* u *сюръективно, то комплекс* $\mathbf{K}(u)$ *гомотопен нулю* (с. 38), *так же как и комплексы* $\mathbf{K}^A_{\cdot}(u, C)$ *и* $\mathbf{K}^{\cdot}_A(v, C)$ *для всякого комплекса* C.

Действительно, существует элемент $x \in L$, для которого $u(x) = 1$. Поэтому комплекс $\mathbf{K}(u)$ гомотопен нулю согласно предложению 1, следовательно, тем же свойством обладают комплексы $\mathbf{K}^A_{\cdot}(u, C)$ (с. 73, предложение 3) и $\mathbf{K}^{\cdot}_A(u, c)$ (с. 90, предложение 3).

Следствие 2. *Пусть* C *– комплекс,* Ann(C) *– его аннулятор. Тогда идеал* $\mathfrak{q} + \mathrm{Ann}(C)$ *аннулирует* $H^A_{\cdot}(u, C)$ *и* $H^{\cdot}_A(u, C)$.

Для всякого $\lambda \in \mathfrak{q}$ гомотетия $\lambda_{\mathbf{K}(u)}$ гомотопна нулю согласно предложению 1, следовательно, тем же свойством обладают и отображения $1_C \otimes \lambda_{\mathbf{K}(u)}$ и $\mathrm{Homgr}\,(\lambda_{\mathbf{K}(u)}, 1_C)$, согласно предложеиию 3, с. 73, и предложению 3, с. 90; отсюда вытекает, что эле-

мент λ аннулирует $H_\bullet(u, C)$ и $H^\bullet(u, C)$. Если $\lambda \in \mathrm{Ann}(C)$, то отображения $1_{K(u)} \otimes \lambda_C$ и $\mathrm{Homgr}(1_{K(u)}, \lambda_C)$ нулевые.

Предположим, что модуль L *проективен* (соответственно, что комплекс $K(u)$ ацикличен в степенях > 0). Тогда комплекс $K(u)$ проективен согласно III, p. 87, cor. 2 (соответственно представляет собой резольвенту для $A/\mathfrak{q}$); согласно изложенному на с. 104 (соответственно на с. 103) имеем, следовательно, для всякого A-модуля M гомоморфизмы

$$H_r^A(u, M) \to \mathrm{Tor}_r^A(A/\mathfrak{q}, M), \qquad \mathrm{Ext}_A^r(A/\mathfrak{q}, M) \to H_A^r(u, M), \tag{2}$$

соответственно

$$\mathrm{Tor}_r^A(A/\mathfrak{q}, M) \to H_r^A(u, M), \qquad H_A^r(u, M) \to \mathrm{Ext}_A^r(A/\mathfrak{q}, M). \tag{3}$$

Если модуль L проективен и комплекс $K(u)$ ацикличен в степенях > 0, то гомоморфизмы (2) и (3) биективны и взаимно обратны (с. 104, предложение 1).

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $(L_i)_{i \in I}$ *– семейство* A*-модулей, где множество* I *конечно и линейно упорядочено. Пусть* u *– линейная форма на* $\bigoplus_{i \in I} L_i$, u_i *– ее ограничение на* L_i. *Канонический изоморфизм* A*-алгебр* (III, p. 84)

$$g\colon \overset{g}{\bigotimes_{i \in I}} \Lambda(L_i) \to \Lambda\Big(\bigoplus_{i \in I} L_i\Big)$$

определяет изоморфизм комплекса $\bigotimes_{i \in 1} K(u_i)$ (с. 72) *на комплекс* $K(u)$.

Действительно, согласно замечанию 4, с. 73, дифференциал D комплекса $\bigotimes_{i \in I} K(u_i)$ представляет собой антидифференцирование; антидифференцирования d_u и $g \circ D \circ g^{-1}$ алгебры $\Lambda(\oplus L_i)$ совпадают на $\oplus L_i$ с отображением $x \mapsto u(x) \cdot 1$ модуля $\oplus L_i$ в $\Lambda(\oplus L_i)$ и, следовательно, равны (III, p. 128, cor.).

Пусть C и C' – два комплекса A-модулей. Имеем (с. 72 и с. 100) канонические изоморфизмы комплексов

$$C \otimes_A (C' \otimes_A K(u)) \to (C \otimes_A C') \otimes_A K(u),$$

$$\mathrm{Homgr}_A(C', \mathrm{Homgr}_A(K(u), C)) \to \mathrm{Homgr}_A(C' \otimes_A K(u), C),$$

т.е. *изоморфизмы*

$$C \otimes_A K_\bullet^A(u, C') \to K_\bullet^A(u, C \otimes_A C'), \tag{4}$$

$$\mathrm{Homgr}_A(C', K_A^\bullet(u, C)) \to \mathrm{Homgr}_A(K_\bullet^A(u, C'), C). \tag{5}$$

В (4) и (5) возьмем $C' = K(u')$, где $u'\colon L' \to A$ – линейная форма на некотором A-модуле L', и заметим, что комплекс $K_\bullet^A(u, K(u'))$, который равен, по определению, $K(u') \otimes_A K(u)$, отождествляется, согласно предложению 2, с $K(u' \oplus u)$, где $u' \oplus u$: $L' \oplus L \to A$ – линейная форма $(x', x) \mapsto u'(x') + u(x)$. Получаем поэтому изоморфизмы комплексов

$$K_\bullet^A(u' \oplus u, C) \to K_\bullet^A(u, K_\bullet^A(u', C)), \tag{6}$$

$$K_A^\bullet(u', K_A^\bullet(u, C)) \to K_A^\bullet(u' \oplus u, C). \tag{7}$$

Переходя к гомологии, получаем отсюда изоморфизмы A-модулей:

$$H_r^A(u' \oplus u, C) \to H_r^A(u, K_\bullet^A(u', C)), \qquad r \in \mathbf{Z},$$

$$H_A^r(u', K_A^\bullet(u, C)) \to H_A^r(u' \oplus u, C), \qquad r \in \mathbf{Z}.$$

Отметим, наконец, что гомоморфизм, получаемый из произведения в алгебре $\Lambda(L)$,

$$m\colon \mathbf{K}^A(u)\otimes_A \mathbf{K}^A(u) \longrightarrow \mathbf{K}^A(u),$$

представляет собой морфизм *комплексов* (так как d_u – антидифференцирование). Предполагая модуль L *свободным ранга* n и беря композицию с морфизмом комплексов $\mathbf{K}^A(u) \to \Lambda^n L(-n)$, который является тождественным в степени n, получаем морфизм комплексов

$$\chi\colon \mathbf{K}^A(u) \otimes_A \mathbf{K}^A(u) \to \Lambda^n L(-n);$$

этому морфизму канонически соответствует, согласно предложению 12, с. 100, морфизм комплексов

$$\varphi\colon \mathbf{K}^A(u) \to \mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), \Lambda^n L(-n)),$$

который *биективен* (III, p. 87, формула (20); см. также Алгебра, III, с. 445–448). Для всякого комплекса C отсюда получаем, беря композицию, изоморфизм

$$\mathbf{K}^A_\cdot(u, C) = C\otimes_A \mathbf{K}^A(u) \xrightarrow{1\otimes\varphi} C \otimes \mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), \Lambda^n L(-n)) \to$$

$$\to \mathrm{Homgr}_A(\mathbf{K}^A(u), C\otimes_A \Lambda^n L(-n)) = \mathbf{K}^\cdot_A(u,\ C\otimes_A \Lambda^n L(-n)).$$

При переходе к гомологии имеем, следовательно, *канонические* изоморфизмы

$$H^A_r(u, C) \to H^{n-r}_A(u, C\otimes_A \Lambda^n L), \quad r\in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Замечания. 1. *Все предшествующее остается справедливым, когда L – проективный модуль ранга n.*

2. Так как L – свободный модуль ранга n, то модуль $\Lambda^n L$ изоморфен A, и мы имеем *неканонические* изоморфизмы $H^A_r(u, C) \to H^{n-r}_A(u, C)$.

2. Функториальность

Пусть f: $C \to C'$ – морфизм комплексов. Обозначим через

$$\mathbf{K}^A_\cdot(u,\ f)\colon\ \mathbf{K}^A_\cdot(u, C) \to \mathbf{K}^A_\cdot(u, C'),$$

$$\mathbf{K}^\cdot_A(u,\ f)\colon\ \mathbf{K}^\cdot_A(u, C) \to \mathbf{K}^\cdot_A(u, C')$$

морфизмы комплексов $f\otimes 1_{\mathbf{K}(u)}$ и $\mathrm{Homgr}_A(1_{\mathbf{K}(u)}, f)$.

Обозначим через $H^A_\cdot(u, f)$: $H^A_\cdot(u, C) \to H^A_\cdot(u, C')$, $H^\cdot_A(u, f)$: $H^\cdot_A(u, C) \to H^\cdot_A(u, C')$, $H^A_r(u, f)$: $H^A_r(u, C) \to H^A_r(u, C')$, $H^r_A(u, f)$: $H^r_A(u, C) \to H^r_A(u, C')$ морфизмы, индуцируемые в гомологии. Отображение $f \to \mathbf{K}^A_\cdot(u, f)$ линейно; если g: $C' \to C''$ – другой морфизм комплексов, то $\mathbf{K}^A_\cdot(u, g\circ f) = \mathbf{K}^A_\cdot(u, g)\circ \mathbf{K}^A_\cdot(u, f)$; аналогично для $\mathbf{K}^\cdot_A$, $H^\cdot_A$, H^A_r, H^r_A.

Пусть $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ – точная последовательность комплексов.

а) *Предположим, что модуль* L *плоский*; тогда $\Lambda(L)$ – плоский модуль (с. 18, следствие). Поэтому последовательность

$$0 \to \mathbf{K}^A_\cdot(u, C') \xrightarrow{\mathbf{K}^A_\cdot(u,\ f)} \mathbf{K}^A_\cdot(u, C) \xrightarrow{\mathbf{K}^A_\cdot(u,\ g)} \mathbf{K}^A_\cdot(u, C'') \to 0$$

точная, и она определяет (с. 35) гомологическую точную последовательность

$$\ldots \to H^A_n(u, C') \xrightarrow{H_n(u,\ f)} H^A_n(u, C) \xrightarrow{H_n(u,\ g)} H^A_n(u, C'') \xrightarrow{\partial_n} H^A_{n-1}(u, C') \to \ldots$$

б) *Предположим, что модуль* L *проективный*; тогда $\Lambda(L)$ – проективный модуль. Поэтому последовательность

$$0 \to \mathbf{K}_A^{\cdot}(u, C') \xrightarrow{\mathbf{K}_A^{\cdot}(u, f)} \mathbf{K}_A^{\cdot}(u, C) \xrightarrow{\mathbf{K}_A^{\cdot}(u, g)} \mathbf{K}_A^{\cdot}(u, C'') \to 0$$

точная, и она определяет гомологическую точную последовательность

$$\ldots \to \mathrm{H}_A^n(u, C') \xrightarrow{\mathrm{H}^n(u, f)} \mathrm{H}_A^n(u, C) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(u, g)} \mathrm{H}_A^n(u, C'') \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{H}_A^{n+1}(u, C') \to \ldots$$

Пусть $\rho\colon A \to A'$ – гомоморфизм колец, L' – A'-модуль $A' \otimes_A L$, $u'\colon L' \to A'$ – линейная форма $1 \otimes u$. Биективный канонический гомоморфизм (III, p. 83, prop. 8)

$$\psi \quad \Lambda_{A'}(A' \otimes_A L) \to A' \otimes_A \Lambda(L)$$

представляет собой *изоморфизм комплексов* A'-модулей. Отсюда:

1) для всякого комплекса A'-модулей C' получаем *изоморфизм* комплексов A-модулей

$$\mathbf{K}_{\cdot}^{A'}(u', C') \to \mathbf{K}_{\cdot}^{A}(u, C'),$$

беря композицию

$$C' \otimes_{A'} (\Lambda_{A'}(A' \otimes_A L)) \xrightarrow{1_{C'} \otimes \psi} C' \otimes_{A'} A' \otimes_A \Lambda_A(L) \xrightarrow{\varphi} C' \otimes_A \Lambda_A(L),$$

где φ – каноническая биекция (III, p. 85, prop. 14);

2) для всякого комплекса A-модулей C получаем *изоморфизм* комплексов A'-модулей

$$\mathbf{K}_{\cdot}^{A'}(u', A' \otimes_A C) \to A' \otimes_A \mathbf{K}_{\cdot}^{A}(u, C),$$

откуда возникают гомоморфизмы A'-модулей

$$A' \otimes_A \mathrm{H}_n^A(u, C) \to \mathrm{H}_n^{A'}(u', A' \otimes_A C),$$

которые биективны, когда A' – *плоский* модуль над A (с. 74, следствие 2).

Пусть L' – A-модуль, $u'\colon L' \to A$ – линейная форма, $f\colon L \to L'$ – A-гомоморфизм, для которого $u' \circ f = u$.

Из III, p. 161, формула (55), следует, что гомоморфизм $\Lambda(f)\colon \Lambda(L) \to \Lambda(L')$ удовлетворяет соотношению $d_u \circ \Lambda(f) = \Lambda(f) \circ d_{u'}$ и, следовательно, определяет *морфизм комплексов* $\Lambda(u)$.: $\mathbf{K}^A(u) \to \mathbf{K}^A(u')$. Если C – A-комплекс, то получаем морфизмы комплексов

$$1_C \otimes \Lambda(u)\colon \mathbf{K}_{\cdot}^{A}(u, C) \to \mathbf{K}_{\cdot}^{A}(u', C) \quad \text{и} \quad \mathrm{Homgr}(\Lambda(u), 1_C)\colon \mathbf{K}_A^{\cdot}(u', C) \to \mathbf{K}_A^{\cdot}(u, C).$$

Если отображение f биективно, то эти морфизмы являются изоморфизмами.

3. Пример 1: комплекс $\mathbf{S}(L) \otimes_A \Lambda(L)$

Пусть A – кольцо, L – A-модуль, $\mathbf{S}(L)$ – его симметрическая алгебра, $\mathbf{S}(L) \otimes_A L$ – $\mathbf{S}(L)$-модуль, получаемый посредством расширения скаляров, $u\colon \mathbf{S}(L) \otimes_A L \to \mathbf{S}(L)$ – линейная форма, для которой $u(s \otimes x) = sx$ при $s \in \mathbf{S}(L)$, $x \in L$. При каноническом изоморфизме $\mathbf{S}(L)$-модулей (III, p. 83, prop. 8)

$$\Lambda_{\mathbf{S}(L)}(\mathbf{S}(L) \otimes_A L) \to \mathbf{S}(L) \otimes_A \Lambda(L)$$

– дифференциал комплекса $\mathbf{K}^{\mathbf{S}(L)}(u)$ превращается в отображение

$$d\colon \mathbf{S}(L) \otimes_A \Lambda(L) \to \mathbf{S}(L) \otimes_A \Lambda(L),$$

при котором для $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \in L$ имеем

$$d((x_1 \ldots x_p) \otimes (y_1 \wedge \ldots \wedge y_q)) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i+1} y_i x_1 \ldots x_p \otimes (y_1 \wedge \ldots \wedge y_{i-1} \wedge$$

$$\wedge y_{i+1} \wedge \ldots \wedge y_q). \tag{9}$$

Отметим, что d отображает A-модуль $\mathbf{S}^p(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}^q(L)$ в $\mathbf{S}^{p+1}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}^{q-1}(L)$; следовательно, *комплекс* A-*модулей* $\mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L)$ распадается в прямую сумму комплексов, описываемых следующими диаграммами:

$$(\mathfrak{K}_n): \quad 0 \to \mathbf{S}^0 L \otimes_A \mathbf{\Lambda}^n L \to \mathbf{S}^1 L \otimes_A \mathbf{\Lambda}^{n-1} L \to \ldots \to \mathbf{S}^n L \otimes_A \mathbf{\Lambda}^0 L \to 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Если A-модуль L представляет собой прямую сумму конечного семейства $(L_i)_{i \in I}$, где множество I линейно упорядочено, то каноническая биекция

$$\overset{g}{\underset{i \in I}{\otimes}} (\mathbf{S}(L_i) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L_i)) \to \mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L)$$

представляет собой изоморфизм комплексов A-модулей (это следует из предложения 2 (с. 158) или из формулы (9).

Предложение 3. *Если* A-*модуль* L *плоский, то последовательности* $(\mathfrak{K}_n)$ *выше являются точными при* $n > 0$.

а) Отметим сначала, что если p_L обозначает композицию гомоморфизмов

$$\mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L) \overset{\alpha}{\to} \mathbf{S}^0(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}^0(L) \overset{\beta}{\to} A,$$

где α – тензорное произведение канонических проекций, а β – канонический изоморфизм, то нужно доказать, что отображение $H(p_L)$ *биективно.*

б) Если $L = 0$ или если $L = A$, то предложение очевидно.

в) Предположим, что L – свободный модуль конечного ранга; представим его как прямую сумму $L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ свободных A-модулей ранга 1. Согласно замечанию, предшествующему предложению, комплекс $\mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L)$ изоморфен тензорному *n свободных* комплексов $\mathbf{S}(L_i) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L_i)$, гомология которых, согласно б), представляет собой *свободный* модуль. Согласно следствию 4, с. 84, канонический гомоморфизм

$$\gamma: \quad \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} H(\mathbf{S}(L_i) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L_i)) \to H(\mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L))$$

биективен. Согласно б), отображение $H(p_{L_i})$ биективно для всякого i. Так как $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} H(p_{L_i}) = H(p_L) \otimes \gamma$, то гомоморфизм $H(p_L)$ биективен.

г) В общем случае L представляет собой индуктивный предел направленной индуктивной системы $(L_i)_{i \in I}$ свободных модулей конечного ранга (с. 18, теорема 1). Так как канонический биективный гомоморфизм

$$\varinjlim \mathbf{S}(L_i) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L_i) \to \mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{\Lambda}(L)$$

представляет собой изоморфизм комплексов, то предложение следует из предложения 1, с. 34.

Замечания. 1. Мы увидим ниже (с. 165, пример) другое доказательство части в) предложения 3.

2. Если A – **Q**-алгебра, то заключение предложения 3 остается справедливым без ограничения на L (см. с. 173, упражнение 1).

*3. Пусть G - группа и p: $G \to \mathbf{GL}(L)$ – линейное представление группы G в плоском A-модуле L. Тогда $(\mathfrak{K}_n)$ представляют собой точные последовательности линей-

ных представлений. Предположим, что L — проективный модуль конечного типа и обозначим через $R_A(G)$ кольцо представленной группы G в проективных A-модулях конечного типа. Из предложения 3 следует, что в $R_A(G)$ имеют место соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [S^i(L)][\Lambda^{n-i}(L)] = 0, \qquad n > 0. \tag{10}$$

Рассматривая формальные ряды

$$s(T) = \sum_{i=0}^{\infty} [S^i(L)]T^i \in R_A(G)[[T]],$$

$$\lambda(T) = \sum_{i=0}^{\infty} [\Lambda^i(L)]T^i \in R_A(G)[[T]],$$

соотношения (10) можно записать в виде

$$s(T)\lambda(-T) = 1. \ast \tag{11}$$

4. Пример 2: случай свободного модуля

Пусть k — кольцо, M — k-модуль, I — некоторое множество и p целое число $\geqslant 0$. Отображение m: $I^p \to M$ называется *кососимметрическим* (или *знакопеременным*), если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

а) для всякой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ и всякой последовательности $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in I^p$

$$m(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma m(\alpha_1, ..., \alpha_p),$$

б) для всякой последовательности $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in I^p$, в которой два из элементов $\alpha_1, ..., \alpha_p$ равны, $m(\alpha_1, ..., \alpha_p) = 0$. (В случае, когда I — k-модуль и отображение m полилинейное, мы приходим к понятию, введенному в III, p. 80; Алгебра, III, с. 392.)

Предположим, что множество I *конечное*, и обозначим через $C_I^p(M)$ k-модуль кососимметрических отображений из I^p в M.

Пусть L_0 — k-модуль, $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство элементов из L_0; определим два k-линейных отображения

$$g\colon \mathrm{Hom}_k(\Lambda^p L_0, M) \to C_I^p(M), \qquad h\colon C_I^p(M) \to M \otimes_k \Lambda^p L_0$$

следующим образом: если $f \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda^p L_0, M)$, то положим:

$$g(f)(\alpha_1, ..., \alpha_p) = f(e_{\alpha_1} \wedge ... \wedge e_{\alpha_p});$$

пусть $m \in C_I^p(M)$, определим $h(m) \in M \otimes_k \Lambda^p L_0$. Для всякой последовательности $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in I^p$ элемент $m(\alpha_1, ..., \alpha_p) \otimes (e_{\alpha_1} \wedge ... \wedge e_{\alpha_p})$ из $M \otimes_k \Lambda^p L_0$ равен нулю, если $\mathrm{Card}\{\alpha_1, ..., \alpha_p\} < p$, и не зависит от порядка элементов $\alpha_1, ..., \alpha_p$, если

$$\mathrm{Card}\{\alpha_1, ..., \alpha_p\} = p.$$

Он зависит только от *подмножества* $J = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ в I; обозначим его через $h_J(m)$; имеем: $h_J(m) = 0$, если $\mathrm{Card}(J) < p$; положим теперь:

$$h(m) = \sum_J h_J(m),$$

где J пробегает подмножества в I, имеющие p элементов.

Л е м м а 2. *Если* L_0 *— свободный* k*-модуль с базисом* $(e_\iota)_{\iota \in I}$, *то* k*-линейные отображения* g *и* h *биективны.*

Это следует из III, p. 79, th. 1 (Алгебра, III, стр. 397, теорема 1).

Пусть теперь M – k-модуль и $x = (x_i)_{i \in I}$ – семейство попарно перестановочных k-эндоморфизмов модуля M. Рассмотрим кольцо многочленов $A = k[(X_i)_{i \in I}]$ и наделим M структурой A-модуля, относительно которой $P(X_i)m = P(x_i)m$ для $P \in A$ и $m \in M$. Пусть, с другой стороны, L – свободный A-модуль A^I, $(e_i)_{i \in I}$ – его канонический базис и u: $L \to A$ – линейная форма, которая отображает e_i в X_i для всякого $i \in I$. Рассмотрим комплексы k-модулей $K_\cdot^A(u, M)$ и $K_A^\cdot(u, M)$; имеем канонические *изоморфизмы*

$$K_A^p(u, M) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda_A^p(A^I), M) \to \mathrm{Hom}_k(\Lambda_k^p(k^I), M),$$

$$M \otimes_k \Lambda_k^p(k^I) \to M \otimes_A \Lambda_A^p(A^I) = K_p^A(u, M);$$

из них посредством композиции с изоморфизмами g и h получаем *изоморфизмы k-модулей*

$$\theta^p: K_A^p(u, M) \to C_I^p(M), \qquad \theta_p: C_I^p(M) \to K_p^A(u, M).$$

Обозначим через

$$\partial^p: C_I^p(M) \to C_I^{p+1}(M), \qquad \partial_p: C_I^p(M) \to C_I^{p-1}(M).$$

k-гомоморфизмы, получаемые переносом дифференциалов из $K_A^\cdot(u, M)$ и $K_\cdot^A(u, M)$ посредством изоморфизмов θ. Имеем, например,

$$(\partial^p m)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} x_{\alpha_j} m(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{p+1}). \tag{12}$$

Комплекс, образованный модулями $C_I^p(M)$ и гомоморфизмами ∂^p (соответственно ∂_p) обозначается через $K^\cdot(x, M)$ (соответственно $K_\cdot(x, M)$) и называется верхним (соответственно нижним) *комплексом Козюля*, ассоциированным с модулем M и последовательностью эндоморфизмов $(x_1, \ldots, x_n)$. Имеем, таким образом, изоморфизмы комплексов k-модулей

$$\theta^\cdot: K_A^\cdot(u, M) \to K^\cdot(x, M), \qquad \theta_\cdot: K_\cdot(x, M) \to K_\cdot^A(u, M).$$

Замечание. Обратно, пусть B – k-алгебра; L – свободный B-модуль с базисом $(e_i)_{i \in I}$ и M – B-модуль. Задание линейной формы u: $L \to B$ эквивалентно заданию семейства $x = (x_i)_{i \in I}$ элементов из B посредством соотношения $x_i = u(e_i)$. Тогда комплекс k-модулей $K_B^\cdot(u, M)$ (соответственно $K_\cdot^B(u, M)$) отождествляется посредством изоморфизма $\theta^\cdot$ (соответственно $\theta_\cdot$) с комплексом Козюля $K^\cdot(x, M)$ (соответственно $K_\cdot(x, M)$). Например, комплекс $K^B(u)$ отождествляется с $K_\cdot(x, B)$.

Так же как и в п.1 (с. 157), вводим обозначения $H_\cdot(x, M)$, $H^\cdot(x, M)$ и т.д., и с надлежащими изменениями к этим модулям применимы все результаты из п.1 и 2, в которых в качестве модуля L берется *свободный* модуль A^I. Например, имеем изоморфизмы

$$H_0(x, M) \to M/(x)M,$$

$$H^0(x, M) \to \mathrm{Hom}_A(A/(x), M),$$

где (x) обозначает идеал $\sum A x_i$ в A. Еще один пример: если комплекс $K_\cdot(x, A)$ ациклический в степенях > 0, то имеют место изоморфизмы

$$H_r(x, M) \to \mathrm{Tor}_r^A(A/(x), M),$$

$$\mathrm{Ext}_A^r(A/(x), M) \to H^r(x, M).$$

Наконец, предположим, что множество I (конечно и) линейно упорядочено, например, $I = \{1, \ldots, n\}$; отождествим A-модуль $\Lambda^n(A^I)$ с A с помощью базисного элемента $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ и переведем в новые обозначения изоморфизм $K_p^A(u, M) \to K_A^{n-p}(u, M)$ со с. 159. Посредством переноса с помощью θ_p и θ^{n-p} он превращается в изоморфизм

$$C_I^p(M) \to C_I^{n-p}(M),$$

сопоставляющий элементу $m \in C_I^p(M)$ элемент $\check{m}$ из $C_I^{n-p}(M)$, для которого

$$m(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \check{m}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-p}), \tag{13}$$

если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{n-p})$ есть *четная* перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$. Заметим также, что когда $I = \{1, \ldots, n\}$, можно отождествить $C_I^p(M)$ с множеством семейств $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ элементов из M, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$; формула (12) остается справедливой, так же как и соотношение (13).

Пример. Возьмем $M = k[T_1, \ldots, T_n]$; комплекс Козюля $K^\cdot(\partial/\partial T, M)$, ассоциированный с последовательностью эндоморфизмов $(\partial/\partial T_1, \ldots, \partial/\partial T_n)$, отождествляется с комплексом де Рама алгебры $k[x_1, \ldots, x_n]$ над k (с. 46): элементу $m \in C^p_{\{1,\ldots,n\}}(M)$ соответствует дифференциальная форма

$$\omega(m) = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p} m(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, dx_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha_p},$$

см. формулу (12) и пример 1, с. 46.

5. Пример 3: случай L = A

Если L = A, то положим $u(1) = x \in A$. Комплекс $K(u)$ имеет в этом случае длину 1, $K_0(u) = K_1(u) = A$ и $d_1(a) = xa$, следовательно, для всякого A-модуля M модули $K_0(u, M), K_1(u, M), K^0(u, M)$ и $K^1(u, M)$ отождествляются с M, причем дифференциалы

$$d_1\colon K_1(u, M) \to K_0(u, M) \quad \text{и} \quad d^0\colon K^0(u, M) \to K^1(u, M)$$

представляют собой отображение $m \mapsto xm$. Имеем, следовательно, изоморфизмы:

$$H_0(x, M) \to A/xA \otimes_A M \leftarrow H^1(x, M),$$

$$H_1(x, M) \to \mathrm{Hom}_A(A/xA, M) \leftarrow H^0(x, M).$$

Лемма 3. *Пусть* K – *комплекс, для которого* $K_i = 0$ *при* $i \neq 0, 1$, *и пусть* C – *комплекс и* p – *целое число.*

а) *Если комплекс* K *плоский, то для всякого* $p \in \mathbf{N}$ *имеем точную последовательность*

$$0 \to H_0(K \otimes_A H_p(C)) \to H_p(K \otimes_A C) \to H_1(K \otimes_A H_{p-1}(C)) \to 0.$$

б) Если комплекс K проективный, то для всякого $p \in \mathbf{N}$ имеем точную последовательность

$$0 \to H^1(\mathrm{Homgr}_A(K, H^{p-1}(C))) \to H^p(\mathrm{Homgr}(K, C)) \to H^0(\mathrm{Homgr}_A(K, H^p(C))) \to 0.$$

Докажем утверждение а), поскольку утверждение б) доказывается аналогично. Для всякого i обозначим через $K_{(i)}$ комплекс $K_i(-i)$. Имеем точную последовательность комплексов, расщепляемую как точная последовательность A-модулей:

$$0 \to K_{(0)} \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K_{(1)} \to 0;$$

последовательность

$$0 \to K_{(0)} \otimes_A C \xrightarrow{\alpha \otimes 1} K \otimes_A C \xrightarrow{\beta \otimes 1} K_{(1)} \otimes_A C \to 0 \tag{14}$$

точная, и так как комплекс K плоский, гомоморфизмы

$$\gamma_{0,p}(K_{(0)}, C)\colon K_{(0)} \otimes_A H_p(C) \to H_p(K_{(0)} \otimes_A C),$$

$$\gamma_{1,p-1}(K_{(1)}, C)\colon K_{(1)} \otimes_A H_{p-1}(C) \to H_p(K_{(1)} \otimes_A C)$$

биективны (с. 74, следствие 2). Вычислим связывающий гомоморфизм $\partial(\alpha \otimes 1, \beta \otimes 1)$; по определению, он отображает класс цикла $\sum a_i \otimes b_i$ на класс цикла $\sum da_i \otimes b_i$, а это означает, что

$$\partial(\alpha \otimes 1, \beta \otimes 1) \circ \gamma(K_{(1)}, C) = \gamma(K_{(0)}, C) \circ (d_K \otimes 1).$$

Гомологическая точная последовательность, ассоциированная с (14), принимает, таким

образом, вид:

$$K_1 \otimes_A H_p(C) \xrightarrow{d_K \otimes 1} K_0 \otimes_A H_p(C) \to H_p(K \otimes_A C) \to$$

$$\to K_1 \otimes_A H_{p-1}(C) \xrightarrow{d_K \otimes 1} K_0 \otimes_A H_{p-1}(C),$$

откуда а).

Применяя лемму 3,а) к комплексу $\mathbf{K}(u)$ и используя изоморфизмы коммутирования, получаем:

Предложение 4. *Для всякого комплекса* C *имеют место точные последовательности*

$$0 \to A/xA \otimes_A H_p(C) \to H_p(x, C) \to \mathrm{Hom}_A(A/xA, H_{p-1}(C)) \to 0.$$

Следствие 1. *Для того чтобы* $H_p(x, C) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы гомотетия относительно* x *в* $H_p(C)$ *была сюръективна, а в* $H_{p-1}(C)$ *– инъективна.*

Следствие 2. *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *– последовательность элементов из* A, M *– A-модуль,* x' *– последовательность* $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. *Имеют место точные последовательности*:

$$0 \to A/x_n A \otimes_A H_p(x', M) \to H_p(x, M) \to \mathrm{Hom}_A(A/x_n A, H_{p-1}(x', M)) \to 0.$$

Следствие 3. *Для того чтобы модуль* $H_i(x, M)$ *был нулевым при всех* $i > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы гомотетия относительно* x_n *в* $H_i(x', M)$ *была биективна при всех* $i > 0$ *и чтобы гомотетия относительно* x_n *в* $M/(x')M$ *была инъективна.*

6. Полные пересечения

Пусть A – кольцо, M – A-модуль, $x = (x_i)_{i \in I}$ – семейство элементов из A.

Определение 2. Семейство x называется *полным пересечением* для M, если $H_i(x, M) = 0$ при $i > 0$.

Если множество I конечно, то это равносильно (с. 159) тому, что $H^i(x, M) = 0$ при $i < \mathrm{Card}(I)$.

Следующее предложение позволяет дать примеры полных пересечений.

Предложение 5. *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *– последовательность элементов из* A. *Если при* $i = 1, \ldots, n$ *гомотетия относительно* x_i *в* A*-модуле* $M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$ *инъективна, то последовательность* x *представляет собой полное пересечение для* M.

Последовательность, удовлетворяющая условиям предложения, называется *регулярной относительно* M, или M*-регулярной*. Отметим, что это свойство зависит, вообще говоря, от *порядка* элементов x_i; например, последовательность (1, 0) всегда M-регулярна, тогда как последовательность (0, 1) регулярна, только если модуль M нулевой. Зато тот факт, что последовательность представляет собой полное пересечение, не зависит от порядка ее членов.

Докажем предложение индукцией по n, причем случай $n = 0$ очевиден. Положим $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$; если последовательность x M-регулярна, то последовательность x' M-регулярна и умножение на x_n в $M/(x')M$ инъективно; согласно индуктивному предположению, $H_i(x', M) = 0$ при $i > 0$; из следствия 3 теперь вытекает, что $H_i(x, M) = 0$ при $i > 0$.

Пример. Пусть k – кольцо; возьмем $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ и $x = (X_1, \ldots, X_n)$. Последовательность x A-регулярна, и предложение дает новое доказательство ацикличности в степенях > 0 комплекса $\mathbf{S}_k(k^n) \otimes_k \mathbf{\Lambda}(k^n)$ (см. с. 161, предложение 3).

Аналогично, в кольце степенных рядов $\hat{A} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ последовательность $(X_1, \ldots, X_n)$ $\hat{A}$-регулярна, следовательно, является полным пересечением для $\hat{A}$.

Предложение 6. а) *Если* $\sum_{i \in I} x_i A = A$, *то семейство* $(x_i)_{i \in I}$ *представляет собой полное пересечение для* M.

б) *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *– последовательность элементов из* A. *Пусть* $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A)$; *положим*

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

Если последовательность x является полным пересечением для M, *то тем же свойством обладает и последовательность* $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

в) *Пусть* $k_1, \ldots, k_n$ – *целые числа* $\geqslant 1$; *для того чтобы последовательность* $(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$ *была полным пересечением для* M, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность x была полным пересечением для* M.

Утверждение а) вытекает из следствия 1, с. 157.

Докажем б). Пусть $f\colon A^n \to A^n$ – изоморфизм, определяемый матрицей ${}^t(a_{ij})$; из сказанного на с. 160 следует, что $1_M \otimes \Lambda(f)$ есть изоморфизм комплекса $\mathbf{K}.(y, M)$ на комплекс $\mathbf{K}.(x, M)$, откуда вытекает б).

Для доказательства утверждения в), очевидно, достаточно доказать, что если k – целое число $\geqslant 1$, то последовательность $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^k)$ является полным пересечением в том и только том случае, если этим свойством обладает последовательность x. Пусть $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$; согласно следствию 3, с. 165, первое (соответственно второе) условие означает, что гомотетия относительно x_n^k (соответственно x_n) биективна в $H_i(x', M)$ при $i \geqslant 1$ и инъективна в $M/(x')M$. Эти два условия, очевидно, эквивалентны, откуда следует в).

Замечание 1. Утверждение, аналогичное в), справедливо и для регулярных последовательностей (с. 173, упражнение 5).

Предложение 7. а) *Пусть* N – *плоский* A-*модуль. Если семейство x является полным пересечением для* M, *то оно обладает тем же свойством и для* $M \otimes_A N$.

б) *Пусть* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – *точная последовательность* A-*модулей. Если семейство x является полным пересечением для* M′ *и* M″, *то оно обладает тем же свойством и для* M.

Комплекс $\mathbf{K}.(x, M \otimes_A N)$, изоморфен, по определению, комплексу $\mathbf{K}.(x, M) \otimes_A N$; так как модуль N плоский, то отсюда получаем изоморфизм $H.(x, M) \otimes_A N \to H.(x, M \otimes_A N)$ (с. 74, следствие 2), откуда следует а).

Так как комплекс $\mathbf{K}.(x)$ плоский, то имеем точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathbf{K}.(x, M) \to \mathbf{K}.(x, M) \to \mathbf{K}.(x, M'') \to 0;$$

утверждение б) следует из ассоциированной гомологической точной последовательности.

Замечания. 2. Утверждения, аналогичные а) и б), для регулярных последовательностей очевидны.

3. Если семейство x представляет собой полное пересечение для A, то комплекс $\mathbf{K}.(x, A)$ определяет свободную резольвенту A-модуля $A/\mathfrak{x}$, где $\mathfrak{x} = \sum_{i \in I} x_i A$; следовательно, для всякого целого $i \geqslant 0$ и для всякого A-модуля M имеют место изоморфизмы:

$$\operatorname{Ext}_A^{n-i}(A/\mathfrak{x}, M) \to H^{n-i}(x, M) \to H_i(x, M) \to \operatorname{Tor}_i^A(A/\mathfrak{x}, M). \tag{15}$$

4. Последовательность $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется M-*корегулярной*, если (через $(x_i)_M$ обозначается гомотетия относительно x_i в M) гомотетия относительно x_i в модуле

$$\operatorname{Ker}(x_1)_M \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(x_{i-1})_M$$

сюръективна при $i = 1, \ldots, n$. *В этом случае* $H_i(x, M) = 0$ *при* $i < n$; это доказывается тем же способом, что и предложение 5.

Возьмем, например, кольцо $A = k[D_1, \ldots, D_n]$, где k – Q-алгебра, и k-модуль $M = k[T_1, \ldots, T_n]$, наделенный структурой A-модуля, относительно которой $D_i P = \partial P/\partial T_i$ для всякого $P \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тотчас проверяется, что последовательность $(D_1, \ldots, D_n)$ M-корегулярна; принимая во внимание пример на с. 164, получаем отсюда, что *комплекс де Рама алгебры* $k[T_1, \ldots, T_n]$ *над* k *ациклич в степенях* > 0.

7. Критерий для полных пересечений

Пусть A – кольцо, M – A-модуль, $\mathfrak{x}$ – идеал в A. $\mathfrak{x}$-*адической топологией* на M называется топология, совместимая со структурой группы на M, для которой множество подмодулей $\mathfrak{x}^r M$ $(r \geqslant 0)$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля (TG, III, p. 5, exemple; Общая топология, III, с. 102, пример 2). Эта топология

отделима, если и только если

$$\bigcap_{r\geqslant 0} \mathfrak{x}^r = 0.$$

Предположим теперь, что идеал $\mathfrak{x}$ порождается последовательностью $x = (x_1, \ldots, x_n)$ элементов из A. Рассмотрим градуированный A-модуль $\bigoplus_{r\geqslant 0} \mathfrak{x}^r M$ и градуированный A-гомоморфизм степени 0

$$a_M^x\colon\ A[X_1, \ldots, X_n] \otimes_A M \to \bigoplus_{r\geqslant 0} \mathfrak{x}^r M,$$

при котором $a_M^x(P \otimes m) = P(x_1, \ldots, x_n)\, m$, где P – однородный многочлен от $X_1, \ldots, X_n$, а $m \in M$. Обозначим через $\mathfrak{d}$ идеал в $A[X_1, \ldots, X_n]$, порожденный элементами $(x_i X_j - x_j X_i)$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Имеем: $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если $P \in \mathfrak{d}$, так что отображение a_M^x дает посредством перехода к фактормодулю градуированный A-гомоморфизм степени 0

$$\alpha_M^x\colon\ (A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}) \otimes_A M \to \bigoplus_{r\geqslant 0} \mathfrak{x}^r M.$$

Беря тензорное произведение с $A/\mathfrak{x}$, получаем из α_M^x градуированный A-гомоморфизм степени 0

$$\beta_M^x\colon\ (A/\mathfrak{x})[X_1, \ldots, X_n] \otimes_A M \to \bigoplus_{r\geqslant 0} (\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M).$$

Гомоморфизмы a_M^x, α_M^x и β_M^x сюръективны.

Теорема 1. *Рассмотрим следующие условия*:

(i) *Последовательность x* M*-регулярна* (с. 165).

(ii) *Последовательность x представляет собой полное пересечение для* M (с. 165, определение 2).

(iii) $H_1(x, M) = 0$

(iv) *Гомоморфизм* $\alpha_M^x\colon\ (A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}) \otimes_A M \to \bigoplus_{r\geqslant 0} \mathfrak{x}^r M$ *биективен.*

(v) *Гомоморфизм* $\beta_M^x\colon\ (A/\mathfrak{x})[X_1, \ldots, X_n] \otimes_A M \to \bigoplus_{r\geqslant 0} (\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M)$ *биективен.*

Имеют место импликации: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v). *Если для* $1 \leqslant i \leqslant n$ A*-модуль* $M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$ *отделим относительно* $\mathfrak{x}$*-адической топологии, то условия* (i)–(v) *эквивалентны.*

Теорема будет доказана в II.8 и 9.

*Следствие 1. *Если кольцо* A *нётерово,* A*-модуль* M *имеет конечный тип и элементы* x_i *принадлежат радикалу кольца* A, *то условия* (i)–(v) *в теореме эквивалентны.*

Действительно, на каждом из модулей $M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$ $\mathfrak{x}$-адическая топология отделима (AC, III, § 3, n°3, prop. 6; Коммутативная алгебра, III, стр. 249, предложение 6).*

Следствие 2. *Предположим, что* A – *градуированное кольцо с положительными степенями,* M – *ограниченный снизу градуированный* A*-модуль и* x_i – *однородные элементы степени* > 0 *из* A. *Тогда условия* (i)–(v) *в теореме эквивалентны.*

Действительно, $\mathfrak{x}$-адическая топология отделима для всякого ограниченного снизу градуированного A-модуля N, так как если $N_n = 0$ при $n < n_0$, то $\mathfrak{x}^a N \subset \sum_{j\geqslant n_0+a} N_j$ для всякого $a \geqslant 0$.

Следствие 3. *Предположим, что модули* $M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$ *отделимы относительно* $\mathfrak{x}$*-адической топологии* $(1 \leqslant i \leqslant n)$; *пусть p – целое число, заключенное между* 1 *и n. Для того чтобы последовательность x была полным пересечением для* M, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $(x_1, \ldots, x_p)$ *была полным пересечением для* M *и чтобы последовательность* $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *была полным пересечением для* $M/(x_1 M + \ldots + x_p M)$.

Действительно, следствие очевидно, если в его формулировке заменить "полные пересечения" на "регулярные последовательности"; но оба эти понятия в данном случае совпадают, согласно теореме.

Замечание. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность элементов из A, для которой $H_1(x, A) = 0$; тогда ядро сюръективного гомоморфизма u: $A^n \to \mathfrak{x}$, при котором $u(\Sigma a_i e_i) = \Sigma a_i x_i$, порождается элементами $x_j e_i - x_i e_j$; следовательно, A-алгебра $A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}$ изоморфна симметрической алгебре $S_A(\mathfrak{x})$ (III, p. 69, prop. 4). Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что гомоморфизм алгебр $S_A(\mathfrak{x}) \to \bigoplus_n \mathfrak{x}^n$, получаемый из канонического вложения модуля $\mathfrak{x}$ в $\bigoplus_n \mathfrak{x}^n$, представляет собой изоморфизм. То же самое справедливо для гомоморфизма $S_A(\mathfrak{x}/\mathfrak{x}^2) \to \bigoplus_n \mathfrak{x}^n/\mathfrak{x}^{n-1}$.

8. Доказательство теоремы 1: первая часть

Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) уже доказана (с. 165, предложение 5). Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна; то же самое относится к импликации (iv) $\Rightarrow$ (v), так как гомоморфизм β_M^x совпадает с $\alpha_M^x \otimes 1_{A/\mathfrak{x}}$.

Чтобы доказать, что из условия (iv) следует (iii), рассмотрим гомоморфизм $(\alpha_M^x)_1$, индуцируемый на компонентах степени 1. Обозначим через E градуированный A-модуль $A[X_1, \ldots, X_n]$; A-модуль E_1 свободен с базисом $X_1, \ldots, X_n$, а $\mathfrak{d}_1$ есть A-подмодуль в E_1, порождаемый элементами $(x_i X_j - x_j X_i)$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Следовательно, модуль $((E/\mathfrak{d}) \otimes_A M)_1$ отождествляется с модулем $K_1(x, M)/B_1(K.(x, M))$, причем гомоморфизм $(\alpha_M^x)_1$ отождествляется с отображением модуля $K_1(x, M)/B_1(K.(x, M))$ на $B_0(K.(x, M))$, индуцированным гомоморфизмом d_1. Таким образом, обращение модуля $H_1(x, M)$ в нуль равносильно инъективности отображения $(\alpha_M^x)_1$, откуда следует импликация (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Чтобы доказать, что из условия (iii) следует (iv), мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 4. *Пусть* A_0 *— кольцо* $\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ *и пусть* u: $A_0[X_1, \ldots, X_n] \to A_0[U]$ *— гомоморфизм* A_0*-алгебр, при котором* $u(X_i) = T_i U$. *Ядром гомоморфизма и служит идеал* $\mathfrak{d}_0$ *в* $A_0[X_1, \ldots, X_n]$, *порождаемый элементами* $(T_i X_j - T_j X_i)$ *для* $1 \leqslant i < j \leqslant n$. *Если* $\mathfrak{t}$ *обозначает идеал в* A_0, *порожденный последовательностью* $(T_1, \ldots, T_n)$, *то и индуцирует изоморфизм*

$$\overline{u}\colon A_0[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}_0 \to \bigoplus_{r \geqslant 0} \mathfrak{t}^r.$$

Достаточно, очевидно, доказать первое утверждение. Для всякой последовательности натуральных целых чисел $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ и всякого целого числа $k \in [0, n]$ обозначим через $P_{\alpha, k}$ одночлен

$$T_1^{\alpha_0} \ldots T_{k+1}^{\alpha_k} X_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \ldots X_n^{\alpha_n};$$

пусть N — Z-подмодуль в $A_0[X_1, \ldots, X_n]$, порожденный одночленами $P_{\alpha, k}$ для $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Мы покажем, что ограничение гомоморфизма u на N инъективно и что $A_0[X_1, \ldots, X_n] = \mathfrak{d}_0 + N$; так как $\mathfrak{d}_0 \subset \operatorname{Ker} u$, то отсюда будет следовать лемма.

Заметим, что N порождается множеством S, образованным теми одночленами $P_{\alpha, k}$, для которых либо $k = 0$, либо $k > 0$ и $\alpha_k \neq 0$. Чтобы доказать инъективность ограничения u на N, достаточно показать, что два разных элемента из S имеют в качестве образа при u разные одночлены в $A_0(U)$. Но $u(P_{\alpha, k}) = T_1^{\alpha_0} \ldots T_{k+1}^{\alpha_k + \alpha_{k+1}} \ldots T_n^{\alpha_n} U^{\sum_{i \geqslant k+1} \alpha_i}$, так что равенство $u(P_{\alpha, k}) = u(P_{\alpha', k'})$ влечет за собой, что $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k + \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_{k'} + \alpha'_{k'+1}, \ldots, \alpha'_n)$ и $\sum_{i \geqslant k+1} \alpha_i = \sum_{i \geqslant k'+1} \alpha'_i$. Предположим, что одночлены $P_{\alpha, k}$ и $P_{\alpha', k'}$ принадлежат S. Если $k = 0$ и $\alpha_0 = 0$, то $k' = 0, \alpha'_0 = 0$ и $\alpha = \alpha'$. Если же $\alpha_k \neq 0$, то $\alpha'_{k'} \neq 0$, откуда $k = k'$ и $\alpha = \alpha'$. Это дает искомый результат.

Покажем, что всякий одночлен $T^\alpha X^\beta \in A_0[X_1, \ldots, X_n]$ сравним по модулю $\mathfrak{d}_0$ с некоторым $P_{\eta, k}$. Для всякого $\lambda \in \mathbf{N}^n$ обозначим через $i(\lambda)$ (соответственно $j(\lambda)$) наименьшее (соответственно наибольшее) целое число $k \in [1, n]$ для которого $\lambda_k \neq 0$. В множестве одночленов $T^\gamma X^\delta$, сравнимых с $T^\alpha X^\beta$ по модулю $\mathfrak{d}_0$, выберем тот, для которого целое рациональное число $j(\gamma) - i(\delta)$ *минимально*; покажем, что тогда $j(\gamma) - i(\delta) \leqslant 0$. Предположим, что $j(\gamma) > i(\delta)$; обозначим $j = j(\gamma)$, $i = i(\delta)$ и пусть $\epsilon =$

$= \inf(\gamma_j, \delta_i)$. Так как многочлен $(T_j^{\varepsilon} X_i^{\varepsilon} - T_i^{\varepsilon} X_j^{\varepsilon})$ делится на $(T_j X_i - T_i X_j)$, следовательно, принадлежит $\mathfrak{d}_0$, то видим, что одночлен $T^{\gamma} X^{\delta}$ сравним по модулю $\mathfrak{d}_0$ с $T^{\gamma'} X^{\delta'}$, где $\gamma_i' = \gamma_i + \epsilon$, $\gamma_j' = \gamma_j - \epsilon$, $\gamma_k' = \gamma_k$ при $k \neq i, j$ и $\delta_i' = \delta_i - \epsilon$, $\delta_j' = \delta_j + \epsilon$, $\delta_k' = \delta_k$ при $k \neq i, j$. Так как γ_j' или δ_i' равно нулю, то $j(\gamma') - i(\delta') < j(\gamma) - i(\delta)$, что противоречит минимальности $j(\gamma) - i(\delta)$. Следовательно, $j(\gamma) \leqslant i(\delta)$, откуда $T^{\gamma} X^{\delta} \in N$, что завершает доказательство леммы.

Докажем, что из условия (iii) следует (iv). Рассмотрим кольцо $A_0 = Z[T_1, \ldots, T_n]$ и идеал $\mathfrak{t}$ в A_0, порожденный элементами $T_1, \ldots, T_n$. Наделим M структурой A_0-модуля, относительно которой $T_i m = x_i m$ для $m \in M$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Согласно сказанному на с. 163, k-модуль $H_i(x, M)$ канонически отождествляется с $H_i(T, M)$.

Так как последовательность T регулярна относительно A_0, то из импликации (i) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (ii) следует, что комплекс $K.(T, A_0)$ определяет свободную резольвенту A_0-модуля $A_0/\mathfrak{t}$. Заметим, что последний отождествляется с группой Z, наделенной структурой A_0-модуля, относительно которой $T_i Z = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, *условие* (iii) *эквивалентно условию* $\operatorname{Tor}_1^{A_0}(M, Z) = 0$.

Покажем, что условие (iii) влечет за собой, что $\operatorname{Tor}_1^{A_0}(M, A_0/\mathfrak{t}^r) = 0$ для всякого $r \geqslant 1$. Это следует из предыдущего при $r = 1$. В общем случае рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1} \to A_0/\mathfrak{t}^{r+1} \to A_0/\mathfrak{t}^r \to 0. \tag{16}$$

A_0-модуль $\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}$ изоморфен конечному произведению экземпляров модуля Z. Следовательно, $\operatorname{Tor}_1^{A_0}(M, \mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}) = 0$. Отсюда индукцией по r выводим, что

$\operatorname{Tor}_1^{A_0}(M, A_0/\mathfrak{t}^r) = 0$ для всякого r.

Поэтому точная последовательность (16), умноженная тензорно на M, дает точную последовательность

$$0 \to (\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}) \otimes_{A_0} M \to M/\mathfrak{x}^{r+1}M \to M/\mathfrak{x}^r M \to 0, \tag{17}$$

откуда получаем изоморфизм модуля $(\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}) \otimes_{A_0} M$ на $\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M$. Рассматривая точную последовательность $0 \to \mathfrak{t}^{r+1} \to \mathfrak{t}^r \to \mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1} \to 0$, далее получаем индукцией по r, что отображение m_r: $\mathfrak{t}^r \otimes_{A_0} M \to \mathfrak{x}^r M$, индуцируемое действием A_0 в M, является изоморфизмом.

Для доказательства условия (iv) остается заметить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (A_0[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}_0) \otimes_{A_0} M & \xrightarrow{\bar{u} \otimes 1_M} & \bigoplus_{r \geqslant 0} (\mathfrak{t}^r \otimes_{A_0} M) \\ \downarrow e & & \downarrow \oplus m_r \\ (A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{d}) \otimes_A M & \xrightarrow{\alpha_M^{\mathfrak{x}}} & \bigoplus_{r \geqslant 0} \mathfrak{x}^r M, \end{array}$$

в которой e – канонический изоморфизм расширения скаляров (II, p. 85, prop.6), коммутативна, и применить лемму 4.

9. Доказательство теоремы 1: вторая часть

Рассмотрим снова точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1} \xrightarrow{i_r} A_0/\mathfrak{t}^{r+1} \xrightarrow{p_r} A_0/\mathfrak{t}^r \to 0 \tag{16}$$

и соответствующую точную последовательность модулей кручения:

$$\operatorname{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^{r+1}, M) \to \operatorname{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^r, M) \to$$

$$\to (\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}) \otimes_{A_0} M \xrightarrow{i_r \otimes 1_M} (A_0/\mathfrak{t}^{r+1}) \otimes_{A_0} M \xrightarrow{p_r \otimes 1_M} (A_0/\mathfrak{t}^r) \otimes_{A_0} M \to 0. \tag{18}$$

Ядро гомоморфизма $p_r \otimes 1_M$ отождествляется с $\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M$; кроме того, модуль $\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}$ аннулируется элементами T_i и отождествляется с однородной компонентой степени r в A_0, так что гомоморфизм $(\mathfrak{t}^r/\mathfrak{t}^{r+1}) \otimes_{A_0} M \to \mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M$, получаемый из $i_r \otimes 1_M$, отождествляется с однородной компонентой степени r гомоморфизма $\beta_M^{\mathfrak{x}}$.

Поэтому из точной последовательности (18) следует, что условие (v) эквивалентно условию

(v′): *гомоморфизм* $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(p_r, 1_M)$: $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^{r+1}, M) \to \mathrm{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^r, M)$ *сюръективен для всех* $r \geqslant 1$.

Нам остается доказать импликацию (v) ⇒ (i), когда модули

$$M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$$

отделимы относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии ($1 \leqslant i \leqslant n$). Обозначим A-модуль $M/x_1 M$ через $\overline{M}$. По определению, последовательность x регулярна для M, если и только если гомотетия $(x_1)_M$ инъективна и последовательность $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ регулярна для $\overline{M}$. Проводя индукцию по n, достаточно, таким образом, доказать, что если модуль M отделим относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии и если гомоморфизм β_M^x биективен, то отображение $(x_1)_M$ инъективно, а $\beta_M^{x'}$ биективно. Но биективность β_M^x влечет за собой, в частности, что гомотетия относительно X_1 в $\bigoplus_r \mathfrak{r}^r M/\mathfrak{r}^{r+1} M$ инъективна[1]), следовательно, что $\mathrm{Ker}(x_1)_M \subset \bigcap_i \mathfrak{r}^i M$ и тем самым, что отображение $(x_1)_M$ инъективно, если $\mathfrak{r}$-адическая топология на M отделима.

Таким образом, остается доказать, что если отображение $(x_1)_M$ инъективно и модуль M удовлетворяет условию (v′), то модуль $\overline{M}$ удовлетворяет условию (v′) относительно последовательности x'.

По предположению, имеем точную последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{(x_1)_M} M \to \overline{M} \to 0;$$

положим $\overline{A}_0 = A_0/T_1 A_0$, $\overline{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}\overline{A}_0$. Пусть q: $L \to M$ – свободная резольвента A_0-модуля M; так как гомотетия относительно T_1 инъективна в A_0, то она инъективна в L и мы имеем точную последовательность комплексов

$$0 \to L \xrightarrow{(T_1)_L} L \to \overline{L} \to 0,$$

где $\overline{L} = L/x_1 L$, и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{(x_1)_L} & L & \longrightarrow & \overline{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{q}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{(x_1)_M} & M & \longrightarrow & \overline{M} & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Так как q – гомологизм, то $\overline{q}$: $\overline{L} \to \overline{M}$ – свободная резольвента $\overline{A}_0$-модуля $\overline{M}$ (следствие 1, с. 36). Для всякого $\overline{A}_0$-модуля P имеем канонический изоморфизм

$$P \otimes_{A_0} L \to P \otimes_{A_0} \overline{L},$$

откуда, переходя к гомологии, получаем изоморфизм

$$\varphi_P\colon \mathrm{Tor}_1^{A_0}(P, M) \to \mathrm{Tor}_1^{\overline{A}_0}(P, \overline{M}).$$

Если u: $P \to P'$ – $\overline{A}_0$-гомоморфизм, то

$$\varphi_{P'} \circ \mathrm{Tor}_1^{A_0}(u, 1_M) = \mathrm{Tor}_1^{A_0}(u, 1_M) \circ \varphi_P.$$

Учитывая это, предположим, что условие (v′) удовлетворяется для M, и докажем, что оно справедливо для $\overline{M}$. Пусть r – целое число $\geqslant 1$; имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0/\mathfrak{t}^r & \xrightarrow{T_1} & A_0/\mathfrak{t}^{r+1} & \longrightarrow & \overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^{r+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_{r-1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_r} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}_r} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_0/\mathfrak{t}^{r-1} & \xrightarrow{T_1} & A_0/\mathfrak{t}^r & \longrightarrow & \overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^r & \longrightarrow & 0\,, \end{array}$$

[1]) Здесь $\bigoplus_r \mathfrak{r}^r M/\mathfrak{r}^{r+1} M$ рассматривается как градуированный модуль над градуированным кольцом $(A/\mathfrak{r})[X_1, \ldots, X_n]$. – *Примеч. пер.*

из которой получаем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^{r+1}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{A_0}(\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^{r+1}, M) & \longrightarrow & M/\mathfrak{x}^r M & \xrightarrow{x_1} & M/\mathfrak{x}^{r+1} M \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1(\overline{p}_r, 1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1(\overline{p}_r, 1)} & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{t}^r, M) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{A_0}(\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^r, M) & \longrightarrow & M/\mathfrak{x}^{r-1} M & \xrightarrow{x_1} & M/\mathfrak{x}^r M
\end{array}$$

Но умножение на x_1 определяет *вложение* $M/\mathfrak{x}^r M$ в $M/\mathfrak{x}^{r+1} M$: это немедленно следует индукцией по r из точной последовательности

$$0 \to \mathfrak{x}^{r-1} M/\mathfrak{x}^r M \to M/\mathfrak{x}^r M \to M/\mathfrak{x}^{r-1} M \to 0$$

и инъективности гомотетии относительно X_1 в $\bigoplus_{r \geqslant 0} (\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M)$[1]). Условие (v), таким образом, влечет за собой, что гомоморфизм $\mathrm{Tor}_1^{A_0}(\overline{p}_r, 1_M)$ сюръективен для всякого $r \geqslant 1$. Беря композицию с изоморфизмами $(\varphi_{\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^{r+1}})^{-1}$ и $\varphi_{\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^r}$, получаем отсюда, что гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}_1^{\overline{A}_0}(\overline{p}_r, 1_{\overline{M}}) : \mathrm{Tor}_1^{\overline{A}_0}(\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^{r+1}, \overline{M}) \to \mathrm{Tor}_1^{\overline{A}_0}(\overline{A}_0/\overline{\mathfrak{t}}^r, M)$$

сюръективен при $r \geqslant 1$, т.е. справедливость условия (v′) для $\overline{M}$. Это завершает доказательство теоремы.

10. Класс расширений, ассоциированный с регулярной последовательностью

Пусть A — кольцо, M — A-модуль, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность элементов из A. Обозначим через M_i A-модуль $M/(x_1 M + \ldots + x_{i-1} M)$ для $i = 0, \ldots, n+1$, так что M_0 и M_1 отождествляются с M, а $M_{n+1} = M/(x)M$. Обозначим через

$$\overline{x}_i : M_{i-1} \to M_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

A-гомоморфизм, представляющий собой композицию гомотетии модуля M_{i-1} относительно x_i и канонической проекции M_{i-1} на M_i. Обозначим, наконец, через p: $M_n \to M/(x)M$ каноническую проекцию. Диаграмма

$$0 \to M \xrightarrow{\overline{x}_1} M_1 \xrightarrow{\overline{x}_2} M_2 \to \ldots \xrightarrow{\overline{x}_n} M_n \xrightarrow{p} M/(x)M \to 0 \tag{19}$$

представляет собой *точную последовательность*, если и только если последовательность x M-регулярна. *Предполагаем в дальнейшем, что последовательность x регулярна для* M. *Элемент* $\theta_x \in \mathrm{Ext}_A^n(M/(x), M), M)$, ассоциированный с точной последовательностью (19), называется также *ассоциированным с* M-*регулярной последовательностью* x.

Пусть i — целое число, $1 \leqslant i \leqslant n$. Заметим, что последовательность (19) может быть разложена на две точные последовательности

$$0 \to M \xrightarrow{\overline{x}_1} M_1 \xrightarrow{\overline{x}_2} M_2 \to \ldots \xrightarrow{\overline{x}_i} M_i \to M/(x_1 M + \ldots + x_i M) \to 0, \tag{20}$$

$$0 \to M/(x_1 M + \ldots + x_i M) \xrightarrow{\overline{x}_{i+1}} M_{i+1} \to \ldots \to M_n \xrightarrow{p} M/(x)M \to 0, \tag{21}$$

которые представляют собой не что иное, как точные последовательности, соответствующие последовательности $(x_1, \ldots, x_i)$, которая регулярна для M, и последовательности $(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, которая регулярна для $M/(x_1 M + \ldots + x_i M)$. Обозначая через

$$\theta_{(x_1, \ldots, x_i)} \in \mathrm{Ext}_A^i(M/(x_1 M + \ldots + x_i M), M),$$

$$\theta_{(x_{i+1}, \ldots, x_n)} \in \mathrm{Ext}_A^{n-i}(M/(x)M, M/(x_1 M + \ldots + x_i M))$$

классы расширений, ассоциированные с (20) и (21), согласно предложению 3, с. 125, имеем:

$$\theta_{(x_1, \ldots, x_n)} = \theta_{(x_1, \ldots, x_i)} \circ \theta_{(x_{i+1}, \ldots, x_n)}. \tag{22}$$

---

[1]) См. сноску на с. 170. – *Примеч. пер.*

Кроме того, согласно предложению 5 (с. 165), комплекс Козюля $\mathbf{K}(x, \mathrm{M})$ ацикличен в степенях $\neq n$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{\partial^0} \mathbf{K}^1(x, \mathrm{M}) \xrightarrow{\partial^1} \mathbf{K}^2(x, \mathrm{M}) \xrightarrow{\partial^2} \ldots \to \mathbf{K}^n(x, \mathrm{M}) \xrightarrow{q} \mathrm{M}/(x)\mathrm{M} \to 0, \tag{23}$$

в которой мы отождествляем $\mathbf{K}^0(x, \mathrm{M})$ с M и в которой q отображает каждый элемент $m \in \mathbf{K}^n(x, \mathrm{M})$ на класс в $\mathrm{M}/(x)\mathrm{M}$ элемента $m(1, 2, \ldots, n) \in \mathrm{M}$.

Предложение 8. *Предположим, что последовательность x регулярна для* M. *Элемент из* $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/(x)\mathrm{M}, \mathrm{M})$, *ассоциированный с точной последовательностью* (23), *равен* $(-1)^{n(n-1)/2}\theta_x$.

Для $i = 0, 1, \ldots, n$ определим следующим образом A-линейное отображение

$$a^i\colon \mathbf{K}^i(x, \mathrm{M}) \to \mathrm{M}_i = \mathrm{M}/(x_1\mathrm{M} + \ldots + x_{i-1}\mathrm{M}):$$

если $m \in \mathbf{K}^i(x, \mathrm{M})$, то $a^i(m)$ есть класс в M_i элемента $m(1, 2, \ldots, i) \in \mathrm{M}$. Ясно, что a^0 — тождественное отображение модуля M и что $p \circ a^n = q$. Кроме того, $a^{i+1} \circ \partial^i(m)$ есть образ в M_{i+1} элемента

$$\sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k+1} x_k\, m(1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, i+1).$$

Так как x_k аннулирует M_{i+1} при $k = 1, \ldots, i$, то $a^{i+1} \circ \partial^i(m)$ совпадает также с образом элемента

$$(-1)^i x_{i+1}\, m(1, 2, \ldots, i),$$

следовательно,

$$a^{i+1} \circ \partial^i = (-1)^i \bar{x}_{i+1} \circ a^i.$$

Согласно следствиям 1 и 2, с. 126, элемент из $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/(x)\mathrm{M}, \mathrm{M})$, ассоциированный с (23), равен $\prod_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot \theta_x$, откуда следует утверждение.

Следствие. *Предположим дополнительно, что модули* $\mathrm{M}/(x_1\mathrm{M} + \ldots + x_{i-1}\mathrm{M})$ *отделимы относительно* (x)*-адической топологии, и пусть* $(a_{ij}) \in \mathbf{GL}_n(\mathrm{A})$. *Положим*

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad \text{и} \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Тогда последовательность y регулярна для M *и* $\theta_y = \det(a_{ij})^{-1}\theta_x$.

Действительно, последовательность y регулярна для M согласно предложению 6 (с. 165–166) и теореме 1 (с. 167); последнее утверждение следует из предложения 8 и из предложения 4 (с. 126).

Предложение 9. *Предположим, что последовательность x регулярна для* M. *Если* N – A*-модуль, для которого* $(x)\mathrm{N} = 0$, *то* $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$ *при* $i < n$ *и отображение* $\alpha \mapsto \theta_x \circ \alpha$ *из* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}/(x)\mathrm{M})$ *в* $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ (*которое представляет собой также связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности* (19), – см. с. 132, следствие 3) *биективно.*

Нужно доказать, что гомоморфизм $\psi^i\colon \alpha \mapsto \theta_x \circ \alpha$ из $\mathrm{Ext}^{i-n}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}/(x)\mathrm{M})$ в $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ биективен при $i \leqslant n$. Проводим индукцию по n, причем утверждение тривиально при $n = 0$. Положим $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}/x_1\mathrm{M}$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, так что последовательность x' M_1-регулярна. Согласно индуктивному предположению, гомоморфизм

$$\bar{\psi}^{i-1}\colon \alpha \mapsto \theta_{x'} \circ \alpha$$

из $\mathrm{Ext}^{i-n}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}/(x)\mathrm{M})$ в $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}_1)$ биективен при $i \leqslant n$. Кроме того, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{(x_1)\mathrm{M}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}_1 \to 0;$$

соответствующий связывающий гомоморфизм $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}_1) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ представляет собой отображение $\varphi^i\colon \beta \mapsto \theta_{x_1} \circ \beta$ (с. 130, предложение 5); так как $\mathrm{Ext}^i(1_{\mathrm{N}},$

$(x_1)_M) = \mathrm{Ext}^i((x_1)_N, 1_M) = 0$, то получаем отсюда точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M) \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M_1) \xrightarrow{\varphi^i} \mathrm{Ext}^{i+1}_A(N, M) \to 0.$$

Так как $\mathrm{Ext}^i_A(N, M_1) = 0$ при $i < n-1$, то из этих точных последовательностей получаем, что $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(N, M) = 0$ при $i < n-1$, т.е. $i+1 < n$, отсюда следует, что гомоморфизм φ^i биективен при $i < n$ Так как $\psi^i(\alpha) = \theta_x \circ \alpha = \theta_{x_1} \circ \theta_{x'} \circ \alpha = \varphi^{i-1} \circ \bar{\psi}^{i-1}(\alpha)$ для $\alpha \in \mathrm{Ext}^{i-n}_A(N, M/(x)\,M)$, то гомоморфизм ψ^i биективен при $i \leqslant n$.

Упражнения

1. Пусть A – кольцо, L – A-модуль, K – комплекс $S(L) \otimes_A \Lambda(L)$ (с. 160, пример 1).

а) Показать, что существует такой A-линейный эндоморфизм s модуля K, что

$$s(x) \in S^{p-1}L \otimes_A \Lambda^{q+1}L \text{ и } ds(x) + sd(x) = (p+q)x$$

для любых целых $p, q \geqslant 0$ и всякого $x \in S^pL \otimes_A \Lambda^qL$.

б) Предположим, что A – Q-алгебра. Показать, что комплекс K определяет резольвенту A-модуля A.

2. Пусть A – кольцо, u: L → M – гомоморфизм A-модулей.

а) Обозначим через ϵ множитель коммутирования на $\mathbf{Z}^2$, определяемый по формуле: $\epsilon(\alpha\beta) = \alpha_2\beta_2$ для $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Показать, что существует единственное (A, ϵ)-дифференцирование (III, p. 118) d биградуированной алгебры $S(M) \otimes_A \Lambda(L)$ степени $(1, -1)$, при котором $d(1 \otimes x) = u(x) \otimes 1$ для $x \in L$. Показать, что $d \circ d = 0$, так что модуль $S(M) \otimes_A \Lambda(L)$, наделенный градуировкой, получаемой из градуировки модуля $\Lambda(L)$, и дифференциалом d, определяет некоторый комплекс $K(u)$.

б) Если $M = L$ и $u = \mathrm{Id}_L$, то показать, что комплекс $K(u)$ совпадает с комплексом, определенным в п. 3, с. 160–161.

в) Пусть $B = S_A(M)$, и пусть $\bar{u}$: $B \otimes_A L \to B$ – B-гомоморфизм, получаемый из u. Показать, что комплекс $K(u)$ каноонически отождествляется с комплексом $K^B(\bar{u})$.

г) Пусть u' : $L' \to M'$ – второй A-гомоморфизм. Показать, что комплексы $K(u \otimes u')$ и $K(u) \otimes_A K(u')$ изоморфны.

д) Пусть f: L → L' и g: M → M' – два A-гомоморфизма, для которых $g \circ u = u' \circ f$. Показать, что гомоморфизм $S(g) \otimes \Lambda(f)$ представляет собой морфизм комплексов из $K(u)$ в $K(u')$. В частности, если v: M → P – A-гомоморфизм, для которого $v \circ u = 0$, то получаем морфизм комплексов h: $K(u) \to S_A(P)$.

е) Предположим, что последовательность $0 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} P \to 0$ есть точная последовательность плоских A-модулей. Показать, что h – гомологизм (свести к случаю, когда L, M, P свободные модули конечного типа и использовать г)). Вывести отсюда для всякого $n \geqslant 1$ точную последовательность

$$0 \to \Lambda^nL \to M \otimes_A \Lambda^{n-1}L \to \ldots \to S^{n-1}M \otimes_A L \to S^nM \to S^nP \to 0.$$

3. Пусть n – целое число, k – кольцо $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Показать, что для всякого A-модуля M существует такой изоморфизм градуированных A-модулей.

$$\delta_M\text{: } \mathrm{Tor}^A(k, M) \to \mathrm{Ext}_A(k, M)(-n),$$

что для всякого гомоморфизма A-модулей u: M → N имеет место равенство: $\mathrm{Ext}(1_k, u) \circ \delta_M = \delta_N \circ \mathrm{Tor}(1_k, u)$.

4. Пусть A – кольцо, L – A-модуль, u: L → A – линейная форма.

а) Показать, что комплекс $K(u)$, наделенный структурой алгебры $\Lambda(L)$, представляет собой градуированную дифференциальную A-алгебру (с. 69, упражнение 18).

б) Пусть B – косокоммутативная (III, p. 53) градуированная дифференциальная A-алгебра, для которой $B_0 = A$, и пусть f: L → B_1 – A-гомоморфизм, удовлетворяющий условию $d_1 \circ f = u$. Показать, что существует единственный морфизм градуированных дифференциальных A-алгебр F: $K(u) \to B$, для которого $F_0 = 1_A$ и $F_1 = f$.

5. Пусть A – кольцо, M – A-модуль, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – последовательность элементов из A, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, $x^k = (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$[1]. Доказать, что последовательность x^k M-регулярна в том только том случае, если этим свойством обладает последовательность x; в этом случае A-модуль $M/(x^k)M$ обладает композиционным рядом, факторы которого изоморфны $M/(x)M$. (Провести индукцию по n).

---

[1]) Здесь предполагается, что $k_i \geqslant 1, i = 1, \ldots n$. – *Примеч. пер.*

6. Пусть A — кольцо, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность элементов из A, $\mathfrak{x}$ — идеал $\sum_i x_i A$. Пусть

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \to M'' \to 0$$

— точная последовательность A-модулей. Предположим, что последовательность x представляет собой полное пересечение для M и что A-модули $M''/(x_1 M'' + \ldots + x_{i-1} M'')$ отделимы относительно $\mathfrak{x}$-адической топологии ($1 \leqslant i \leqslant n$). Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Последовательность x является полным пересечением для M'',

β) Гомоморфизм $\bigoplus_r (\mathfrak{x}^r M'/\mathfrak{x}^{r+1} M') \to \bigoplus_r (\mathfrak{x}^r M/\mathfrak{x}^{r+1} M)$, индуцированный вложением i, инъективен.

γ) Гомоморфизм $M'/\mathfrak{x}M' \to M/\mathfrak{x}M$, индуцированный вложением i, инъективен.

7. Пусть A — кольцо, M — A-модуль, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность элементов из A.

а) Показать, что существует спектральная последовательность E (с. 49–51, упражнения 14–17), сходящаяся к $H.(x, M)$, для которой $E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}^A_p(H_q(x, A), M)$ (использовать упражнение 8, с. 87).

б) Пусть p — целое число $\leqslant n$; положим $x' = (x_1, \ldots, x_p)$ и $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$. Показать, что существует спектральная последовательность $'E$, сходящаяся к $H.(x, M)$, для которой $'E^2_{p,q} = H_p(x'', H_q(x', M))$.

8. Пусть A — кольцо, M — A-модуль, $x' = (x_1, \ldots, x_p)$ и $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ — две последовательности элементов из A; обозначим через x последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ и через M' — A-модуль $M/(x')M$.

а) Если x' есть полное пересечение для M и x'' — полное пересечение для M', то показать, что x — полное пересечение для M.

б) Если последовательность x и x' являются полными пересечениями для M, то показать, что последовательность x'' есть полное пересечение для M'.

в) Дать пример такой A-регулярной последовательности (x, y), содержащейся в радикале кольца A, что x есть полное пересечение для A/yA, но y не является полным пересечением для A.

9. Пусть A — кольцо, M — A-модуль, k — целое число $\geqslant 1$. Семейство x элементов из A называется k-пересечением для M, если $H_i(x, M) = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, семейство x есть полное пересечение, если и только если оно является k-пересечением для всякого $k \geqslant 1$.

а) Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная последовательность A-модулей. Показать, что если семейство x является k-пересечением для M' и M'', то оно обладает тем же свойством для M.

б) Если x — k-пересечение для M и если N — плоский A-модуль, то x — k-пересечение для $M \otimes_A N$.

в) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа $\geqslant 1$. Показать, что последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ является k-пересечением для M в том и только том случае, если этим свойством обладает последовательность $(x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n})$.

г) Для всякой пары целых чисел k, n, где $1 \leqslant k < n$, дать пример кольца A, A-модуля M и последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов из A, которая является k-пересечением, но не $(k+1)$-пересечением для M (использовать замечание 4, с. 166).

10. Пусть A — кольцо, M — A-модуль, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность элементов из A, p — целое число $\leqslant n$. Введем обозначения: $x' = (x_1, \ldots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ и $M' = M/(x')M$.

а) Пусть k, k' — целые числа, причем $k \leqslant k'$. Предположим, что последовательность x' является k'-пересечением для M (упражнение 9). Показать, что последовательность x является k-пересечением для M, если и только если последовательность x'' — k-пересечение для M'.

б) Показать, что если последовательность x является 1-пересечением для M, то последовательность x'' — 1-пересечение для M'.

¶ 11. Пусть A — *нётерово локальное* кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть M — ненулевой A-модуль конечного типа. *Глубиной* модуля M называется верхняя грань целых чисел n, для которых существует последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов из $\mathfrak{m}$, представляющая собой полное пересечение для M; глубина модуля M обозначается через prof (M).

а) Показать, что prof (M) = 0, если и только если идеал $\mathfrak{m}$ ассоциирован с M (с. 29, упражнение 28), иначе говоря, если модуль M содержит подмодуль, изоморфный k (заметить, что идеал, содержащийся в объединении конечного множества простых идеалов, непременно содержится в одном из них).

б) Показать, что prof (M) есть нижняя грань целых чисел n, для которых модуль $\operatorname{Ext}^n_A(k, M)$ ненулевой (провести индукцию по n). Если prof (M) = n, то всякая последовательность $(x_1, \ldots, x_p)$ элементов из $\mathfrak{m}$, представляющая собой полное пересечение для M ($p \leqslant n$), может быть продолжена до последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$, содержащейся в $\mathfrak{m}$ и являющейся полным пересечением для M.

в) Если $(x_1, \ldots, x_k)$ — последовательность элементов из $\mathfrak{m}$, являющаяся полным пересечением для M, то показать, что

$$\operatorname{prof}(M/(x_1 M + \ldots + x_k M)) = \operatorname{prof}(M) - k.$$

г) Предположим, что модуль M имеет *конечную проективную размерность*. Доказать равенство $\operatorname{dp}_A(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A)$ (провести индукцию по $\operatorname{dp}_A(M)$).

д) Показать, что prof (A) есть верхняя грань проективных размерностей A-модулей, имеющих *конечный тип и конечную проективную размерность*.

¶ 12. Пусть A – нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ – его максимальный идеал.

а) Показать, что если $0 < \mathrm{dh}\,(A) < \infty$, то существует неделитель нуля, содержащийся в $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ (показать, как и в упражнении 11, а), что в противном случае идеал $\mathfrak{m}$ был бы ассоциирован с A, и, следовательно, существовала бы точная последовательность

$$0 \to k \to A \to N \to 0;$$

привести это к противоречию, используя упражнение 16, с. 154).

б) Пусть n – целое число. Показать, что $\mathrm{dh}\,(A) = n$ в том и только том случае, если существует последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ являющаяся полным пересечением для A и порождающая $\mathfrak{m}$ (провести индукцию по n, используя а) и упражнение 14, с. 154).

Локальное кольцо A называется *регулярным*, если оно нетерово и имеет конечную гомологическую размерность.

13. Пусть A – регулярное локальное кольцо (упражнение 12) гомологической размерности n; обозначим через $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал, и пусть $k = A/\mathfrak{m}$.

а) Показать, что $\dim_k (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

б) Показать, что k-алгебра $\bigoplus_{r \geqslant 0} (\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1})$ изоморфна алгебре многочленов от n переменных.

в) Если $n = 0$, то A – поле. Если $n = 1$, то показать, что A – кольцо главных идеалов* и, следовательно, кольцо дискретного нормирования* (показать, что A целостное, заметив, что $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^n = \cap\, \mathfrak{m}^n$, откуда $\cap\, \mathfrak{m}^n = 0$).

г) Показать, что кольцо $A[[T]]$ регулярное.

14. Пусть A – кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал в A. Рассмотрим косокоммутативную градуированную $(A/\mathfrak{a})$-алгебру $\mathrm{Tor}^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a})$ (см. с.141, упражнение 9) и гомоморфизм градуированных $(A/\mathfrak{a})$-алгебр $\theta: \Lambda_{A/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \to \mathrm{Tor}^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a})$, получаемый из изоморфизма $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a})$ (с. 79). Показать, что если идеал $\mathfrak{a}$ порождается последовательностью, являющейся полным пересечением для A, то θ – изоморфизм.

15. Пусть A – *нётерово* кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал, содержащейся в радикале кольца A. Предположим, что $A/\mathfrak{a}$-модуль $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ свободен и что гомоморфизм $\theta_2: \Lambda^2_{A/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \to \mathrm{Tor}_2^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a})$ (упражнение 14) сюръективен. Показать, что $\mathfrak{a}$ порождается последовательностью, являющейся полным пересечением для A. (Если x – минимальное семейство порождающих в $\mathfrak{a}$, то показать с помощью упражнения 7 (или непосредственно), что модуль $\mathrm{Coker}\,(\theta_2)$ изоморфен $H_1(x, A) \otimes_A A/\mathfrak{a}$.)

16. Пусть A – *нётерово локальное* кольцо, $\mathfrak{m}$ – его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$. Показать, что гомоморфизм градуированных k-алгебр $\theta: \Lambda_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \to \mathrm{Tor}^A(k, k)$ инъективен; если отображение θ_2 биективно, то кольцо A регулярное (упражнение 12).

(Если x – минимальная система порождающих идеала $\mathfrak{m}$, то показать, что комплекс $K(x, A)$ удовлетворяет условиям упражнения 14, с. 67–68; использовать упражнения 4 и 15.)

¶ 17. Пусть A – кольцо, для которого A-модуль A_S имеет *конечную инъективную размерность* (с. 152, упражнение 4; *регулярное* локальное кольцо (упражнение 12) обладает этим свойством).

а) Пусть x – элемент, который не является делителем нуля и необратим в A. Показать, что

$$\mathrm{di}_{A/Ax}(A/Ax) = \mathrm{di}_A(A) - 1.$$

(Пусть $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \ldots$ – *минимальная* инъективная резольвента (с. 67, упражнение 13) для A; показать, что комплекс $\mathrm{Hom}_A(A/Ax, I^1) \to \mathrm{Hom}_A(A/Ax, I^2) \to \ldots$ определяет минимальную инъективную резольвенту (A/Ax)-модуля A/Ax.)

б) Предполагаем, далее, что A – *нётерово локальное* кольцо. Доказать равенство $\mathrm{di}\,(A) = \mathrm{prof}\,(A)$ (упражнение 11; провести индукцию по $\mathrm{di}\,(A)$).

в) Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – последовательность, являющаяся полным пересечением для A, содержащаяся в максимальном идеале кольца A, причем $n = \mathrm{di}\,(A)$. Показать, что кольцо $A/(x)$ *самоинъективно* (с. 28, упражнение 26).

18. Пусть A – нётерово кольцо, $\mathscr{C}$ – устойчивое множество классов A-модулей (с. 43), $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – последовательность элементов из A, $\mathfrak{x}$ – идеал, порожденный последовательностью x. Обозначим через $\mathscr{C}_x$ множество элементов из $\mathscr{C}$, аннулируемых идеалом $\mathfrak{x}$. Пусть M – A-модуль конечного типа.

а) Доказать, что для всякого $i \geqslant 0$ существует такой элемент M_i в $\mathscr{C}_x$, что

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k [H_{i+k}(x, M)] = [M_i]$$

в $K(\mathscr{C}_x)$ (провести индукцию по n, используя предложение 4, с. 163; в случае $n = 1$ рассмотреть последовательные степени эндоморфизма $(x_1)_M$).

б) Предположим, что модуль $A/\mathfrak{x}$ имеет конечную длину. Показать, что существуют такие положительные целые числа m_i $(i \geqslant 0)$, что $\log H_i(x, M) = m_i + m_{i+1}$.

(C, d) 30
C_n, C^n 30
$Z(C, d), Z_n(C, d), B(C, d), B_n(C, d), H(C), H_n(C, d), H^n(C, d)$ 31
$H(u), Z(u), B(u)$ 32
$C(p)$ 32
$A(\epsilon)$ 32
$\partial_{u,v}, \partial$ 34
$\mathrm{Con}(u), \mathrm{Cyl}(u)$ 40
$K(\mathscr{C}), [M]_{\mathscr{C}}, [M]$ 43
$\chi_{\varphi}(M), \chi(M)$ 43
$\Omega^p_{A/k}$ 45
∇ 47
$L(M), L(f)$ 56
$I(M), I(f)$ 58
$B(A, M)$ 62
$C \otimes_A C'$ 70
$\gamma(C, C')$: $H(C) \otimes_A H(C') \to H(C \otimes_A C')$ 71
$\sigma(C, C')$ 71
$\mathrm{Tor}^A_n(M, N)$ 75
$\mathrm{Tor}^A(f, g)$ 75
$\psi_M(N), \bar{\psi}_N(M)$ 76
$\sigma_{M,N}$ 78
$\mathrm{Homgr}_A(C, C')$ 88
$\lambda(C, C')$ 89
$\mathrm{Ext}_A(M, N), \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ 92
$\varphi_M(N), \bar{\varphi}_N(M)$ 93
$\delta(M, \mathfrak{E})$ 95
$\delta(\mathscr{F}, N)$ 96
$\psi(S, R), \varphi(R, E)$ 103
$\psi'(S_1, R_1), \varphi'(R_1, E_1)$ 104
$H^n(G, M), H_n(G, M)$ 111
$a_{M,N}$ 121
$c_{M,N,P}$, $u \circ v$ 122
$\delta^m(P, \mathfrak{S}), \delta^m(\mathfrak{S}, P)$ 132
$c_{P,Q;M}$ 133
$c_{P;M,N}$ 134
$\partial_m(P, \mathfrak{S}), \partial_m(\mathfrak{S}_1, M)$ 135, 136
$b \vee b'$, $a \top a'$ 140 (упр. 7)
$\mathrm{dp}_A(M)$ 142
$\mathrm{dih}(A)$ 146
$\mathrm{di}_A(M)$ 152 (упр. 4)
$\mathrm{dpl}_A(M)$ 153 (упр. 7)
$\mathrm{td}(A)$ 153 (упр. 8)
$\mathrm{da}_k(A)$ 156 (упр. 25)
$\mathrm{dc}(G)$ 156 (упр. 28)
$K(u), K_\cdot(u, C), K^\cdot(u, C)$ 157

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно плоское кольцо 27 (упр. 16)
I-адическая топология 166
Алгебра градуированная дифференциальная 69 (упр. 18)
– пополненная 120 (упр. 27)
Ассоциированный с точной последовательностью класс 124
Ациклический в степени n комплекс 32

Бикомплекс 48 (упр. 11)

Верхняя степень 30

Гильберта теорема о сизигиях 152
Голди теорема 28 (упр. 25)
Голода – Шафаревича теорема 116 (упр. 16)
Гомологизм 32
Гомологии классы 31
– модуль 31
Гомологическая размерность 146
– точная последовательность 35
Гомологичные циклы 31
Гомология группы 111
– сингулярная 36
Гомоморфизмов комплексы 88
Гомотопизм 38
Гомотопия 37
Гомотопные морфизмы 37
– симплициально отображения 52 (упр. 19)
Гомотопный нулю комплекс 38

Дедекиндово кольцо 148, 154 (упр. 12)
Делимый модуль 20
Де Рама комплекс 46
Диаграмма змеевидная 8
Диаграммы коммутативные 7
Дифференциал 30
– внешний 46
Дифференциальная алгебра 69 (упр. 18)
Дифференциальные формы 46
Длина комплекса 31
– представления 66 (упр. 6)
Дуализирующий модуль 29 (упр. 30)

Змеевидная диаграмма 8

Индуцированный модуль 114 (упр 12)
Инъективная оболочка 22
– размерность 152 (упр. 4)
– резольвента минимальная 67 (упр. 13)
Инъективные модули 19
Итерированные связывающие гомоморфизмы 132, 135, 136

Каноническая инъективная резольвента 58
– свободная резольвента 56

Класс, ассоциированный с точной последовательностью 124
Классы гомологии 31
Клеточные комплексы 36
Когерентное слева, справа кольцо 67 (упр. 11)
Когерентный модуль 67 (упр. 10)
Когомологическая размерность 156 (упр. 28)
Когомологически тривиальный модуль 116 (упр. 18)
Когомологичные элементы 118 (упр. 23)
Когомология групп 111
Козюля комплексы 157, 163
Коиндуцированный модуль 114 (упр 12)
Кольцо абсолютно плоское 27 (упр. 16)
– дедекиндово 148, 154 (упр. 12)
– когерентное слева, справа 67 (упр. 11)
– локальное регулярное 175 (упр. 12)
– прюферово 153 (упр. 11)
– самоинъективное 28 (упр. 26)
Коммутативные диаграммы 7
Коммутирования изоморфизм 78
Комплекс, ацикличный в степени n 32
– , гомотопный нулю 28
– де Рама 46
– , нулевой слева, справа 31
– , ограниченный слева, справа 31
– расщепляемый 39
Комплексы 30
– гомоморфизмов 88
– клеточные 36
– Козюля 157, 163
Композиционное произведение 122
Конечное представление 14
Коническая симплициальная схема 59 (упр. 19)
Конус морфизмов комплексов 40
Копорождающий модуль 21
Корегулярная последовательность 166
Коэффициентов универсальных формула 83, 99
Кручения произведение 70, 75
Кюннета формула 84

Лемма о пяти гомоморфизмах 11

Минимальная инъективная резольвента 67 (упр. 13)
– проективная резольвента 59
Модули инъективные 19
– плоские 12
– расширений 88, 95
Модуль гомологии 31
– делимый 20
– дуализирующий 29 (упр. 30)
– индуцированный 114 (упр. 12)
– когерентный, псевдокогерентный 67 (упр. 10)
– когомологически тривиальный 116 (упр. 18)
– коиндуцированный 114 (упр. 12)
– конечно представимый 14
– копорождающий 21
– относительно инъективный, проективный 27 (упр. 19)
– строго плоский 26 (упр. 9)
Морфизм комплексов 31

Нижняя степень 30
Нулевой слева, справа комплекс 31

Оболочка инъективная 22
Ограниченный слева, справа комплекс 31
Относительно проективный, инъективный модуль 27 (упр. 19

Перенесение 115 (упр. 14)
Пересечение полное 165
Плоская размерность 153 (упр. 7)
Плоские модули 12
Плоский строго модуль 26 (упр. 9)
Плоское абсолютно кольцо 27 (упр. 16)
Полное пересечение 165
Пополнение алгебры 120 (упр. 27)
Последовательность когерентная 166
– **регулярная** 165
– **спектральная** 49 (упр. 14)
– **точная гомологическая** 35
Предкомплекс 49 (упр. 13)
Представление 14
– **длины** n 66 (упр. 6)
– **конечное** 14
Проективная размерность 142
– **резольвента минимальная** 59
Произведение композиционное 122
– **кручения** 70, 75
– **тензорное двух комплексов** 71
Прюферово кольцо 153 (упр. 11)
Псевдокогерентный модуль 67 (упр. 10)
Пуанкаре многочлен 44

Размерность гомологическая 14
– **инъективная** 152 (упр. 4)
– **когомологическая** 156 (упр. 28)
– **плоская** 153 (упр. 7)
– **проективная** 142
Tor-размерность 153 (упр. 8)
Расширение алгебры 138 (упр. 1)
– – **Ли** 139 (упр. 4)
Расширений модули 88, 95
Расщепление 39
Расщепляемый комплекс 39
Регулярная последовательность 165
– **спектральная последовательность** 50 (упр. 14)
Регулярное локальное кольцо 175 (упр. 12)
Резольвента 54
– **градуированная** 61
– **инъективная каноническая** 58
– – **минимальная** 67 (упр. 13)
– – , **проективная комплекса** 69 (упр. 17)
– **проективная минимальная** 59
– **свободная каноническая** 56
– **стандартная** 62

Самоинъективное кольцо 28 (упр. 26)
Связность 47
Связывающие гомоморфизмы итерированные 132, 135, 136
Связывающий гомоморфизм 34
– – **для модулей расширений** 95, 96
– – – **произведений кручения** 78
Сдвиг p**-й** 32
Сизигии (теорема о сизигиях) 152
Симплекс 52 (упр. 19)
Симплициальная схема 51 (упр. 19)
Симплициально гомотопные отображения 52 (упр. 19)
Сингулярная гомология 36
Спектральная последовательность 49 (упр. 14)
Стандартная резольвента 62
Степень верхняя, нижняя 30
Строго плоский модуль 26 (упр. 9)
Схема симплициальная 51 (упр. 19)
Сходящаяся спектральная последовательность 50 (упр. 14)

Тензорное произведение двух комплексов 71
Теорема Гильберта о сизигиях 152
– Голди 28 (упр. 25)
– Голода – Шафаревича 116 (упр. 16)
Топология I-адическая 166
Трансфер 115 (упр. 14)
Тривиальный когомологически модуль 116 (упр. 1

Универсальных коэффициентов формула 83, 99

Формула Кюннета 84
– универсальных коэффициентов 83, 99
Формы дифференциальные 46

Характеристика Эйлера – Пуанкаре 43

Цилиндр морфизмов комплексов 40

Шафаревича – Голода теорема 116 (упр. 16)

Эйлера – Пуанкаре характеристика 43

СОДЕРЖАНИЕ

СПОСОБ ПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫМ ТРАКТАТОМ 5

§ 1. Дополнительные сведения из линейной алгебры 7

1. Коммутативные диаграммы 7
2. Змеевидная диаграмма 8
3. Плоские модули 12
4. Конечно представимые модули 14
5. Гомоморфизмы конечно представимых модулей 16
6. Структура плоских модулей 17
7. Инъективные модули 19
8. Инъективные копорождающие 21
9. Инъективные оболочки 22
10. Структура инъективных модулей 24
Упражнения 25

§ 2. Комплексы A-модулей 30

1. Комплексы A-модулей 30
2. Операции над комплексами 32
3. Связывающий гомоморфизм и гомологическая точная последовательность 34
4. Гомотопии 37
5. Расщепляемые комплексы 39
6. Конус и цилиндр морфизма комплексов 40
7. Конус инъективного морфизма; новое определение связывающего гомоморфизма . . 42
8. Характеристики Эйлера – Пуанкаре 43
9. Комплексы правых модулей, комплексы мультимодулей 45
10. Пример: комплекс де Рама 45
Упражнения 47

§ 3. Резольвенты 53

1. Продолжение морфизмов комплексов 53
2. Резольвенты 54
3. Каноническая свободная резольвента 56
4. Каноническая инъективная резольвента 57
5. Резольвенты конечного типа 58
6. Минимальные проективные резольвенты 59
7. Градуированные резольвенты 61
8. Стандартная резольвента 61
9. Резольвенты и группы Гротендика 63
Упражнения 64

§ 4. Произведение кручения 70

1. Тензорное произведение двух комплексов 70
2. Тензорные произведения и гомотопия 73
3. Тензорное произведение на плоский комплекс, ограниченный справа 74
4. Определение и простейшие свойства произведения кручения 75
5. Связывающие гомоморфизмы и точные последовательности 78
6. Плоские модули и произведения кручения 81
7. Формула Кюннета 82
8. Ограниченные плоские комплексы над нётеровым кольцом 84
9. Обобщение на комплексы мультимодулей 85
Упражнения 85

§ 5. Модули расширений 88

1. Комплексы гомоморфизмов 88
2. Комплексы гомоморфизмов и гомотопии 90
3. Определение и простейшие свойства модулей расширений 92

4. Связывающие гомоморфизмы и точные последовательности . . . 95
5. Проективные модули, инъективные модули и модули расширений . . . 97
6. Формула универсальных коэффициентов . . . 97
7. Обобщение на комплексы мультимодулей; канонические изоморфизмы . . . 100
Упражнения . . . 101

§ 6. Использование неканонических резольвент . . . 103

1. Вычисление модулей $\mathrm{Tor}^A(P, M)$ и $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ . . . 103
2. Вычисление отображений $\mathrm{Tor}^A(g, f)$ и $\mathrm{Ext}_A(f, h)$ . . . 105
3. Вычисление связывающих гомоморфизмов . . . 106
4. Конечность модулей расширений и кручения . . . 108
5. Гомоморфизмы $\mathrm{Tor}^B(P, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q)$ и $\mathrm{Ext}_B(M, N) \otimes_A Q \to \mathrm{Ext}_B(M, N \otimes_A Q)$ . . . 109
6. Гомоморфизмы $\mathrm{Tor}^B(P, N \otimes_A Q) \to \mathrm{Tor}^A(P \otimes_B N, Q)$ и $\mathrm{Ext}_A(Q, \mathrm{Hom}_B(N, M) \to \mathrm{Ext}_B(N \otimes_A Q, M)$ . . . 110
7. Гомоморфизмы $B \otimes_A \mathrm{Tor}^A(E, F) \to \mathrm{Tor}^B(E \otimes_A B, B \otimes_A F)$ и $B \otimes_A \mathrm{Ext}_A(E, F) \to \mathrm{Ext}_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F)$ . . . 110
8. Приложение: гомология и когомология групп . . . 111
Упражнения . . . 113

§ 7. Композиционное произведение . . . 121

1. Гомоморфизм $\mathrm{Ext}_A(N, P) \otimes \mathrm{Ext}_A(M, N) \to \mathrm{Ext}_A(M, P)$ . . . 121
2. Семь вычислений композиционного произведения . . . 122
3. Класс, ассоциированный с точной последовательностью . . . 123
4. Свойства класса, ассоциированного с точной последовательностью . . . 125
5. Связь между точными последовательностями и элементами из $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ . . . 127
6. Композиционное произведение и связывающие гомоморфизмы для модулей расширений . . . 130
7. Гомоморфизм $\mathrm{Ext}_A(P, Q) \otimes \mathrm{Tor}^A(P, M) \to \mathrm{Tor}^A(Q, M)$ . . . 133
8. Композиционные произведения и связывающие гомоморфизмы для произведений кручения . . . 134
9. Вычисление композиционных произведений посредством сдвига резольвент . . . 136
Упражнения . . . 138

§ 8. Гомологическая размерность . . . 142

1. Проективная размерность модуля . . . 142
2. Гомоморфизм $\mathrm{Tor}_n^A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^n(M, A), P)$ . . . 144
3. Гомологическая размерность кольца . . . 146
4. Кольца гомологической размерности 0 . . . 147
5. Кольца гомологической размерности 1 . . . 147
6. Гомологическая размерность колец многочленов . . . 148
7. Гомологическая размерность градуированных модулей . . . 150
Упражнения . . . 152

§ 9. Комплексы Козюля . . . 157

1. Комплексы $\mathbf{K}(u)$, $\mathbf{K}.(u, C)$, $\mathbf{K}^{\cdot}(u, C)$ . . . 157
2. Функториальность . . . 159
3. Пример 1: комплекс $\mathbf{S}(L) \otimes_A \mathbf{A}(L)$ . . . 160
4. Пример 2: случай свободного модуля . . . 162
5. Пример 3: случай $L = A$ . . . 164
6. Полные пересечения . . . 165
7. Критерий для полных пересечений . . . 166
8. Доказательство теоремы 1: первая часть . . . 168
9. Доказательство теоремы 1: вторая часть . . . 169
10. Класс расширений, ассоциированный с регулярной последовательностью . . . 171
Упражнения . . . 173

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ . . . 176

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . 177